

# 企業間の相互作用と ロトカ・ヴォルテラの微分方程式 (3)

藤 垣 芳 文

## 第1節 はじめに

1.1 生物種のあいだには、競争、共生、寄生、捕食、被食など、多様な相互関係が成立する。こうした生物種間の相互関係の下で生じる個体群の動態的变化をモデル化する微分方程式として「ロトカ・ヴォルテラの微分方程式」が有名である。

私は、3つのパートからなる論考のシリーズという形で、この微分方程式の紹介と経済学への応用を進めてきた。第1部では、市場を介して相互に関連しあう複数企業関係を表現するモデルとして、ロトカ・ヴォルテラ方程式を再構成した。第2部では、このモデルを寡占企業間の競争、協力、および棲み分け（ニッチ）を考察するために応用した。本論文は、このシリーズの最終部、第3部として配置される。その目的は、第1部で提示した企業間関連モデルを用いて、環境税の効果を評価するための理論的な分析枠を提示することにある。

1.2 環境税については、地球温暖化問題が広く社会で意識されるようになった1990年代以降、多くの研究者により活発に研究が進められ、理論面、実証面から優れた成果が積み重ねられてきた。そうした成果の紹介は、石（1993）、植田・岡・新澤（1997）、諸富（2000）、環境経済政策学会（2004）、経済協力開発機構（1994, 2006）などに詳しい。

1.3 これらの文献で紹介されている環境税に関する研究を理論面に注目して眺めてみると、そこには2つの特徴を確認することができるように思われる。

その第1は、多くの場合、経済活動と環境負荷要因との直接的2因関係に焦点を合わせた分析枠組みを設定し、その孤立した系のなかで、環境税の環境負荷抑制効果を分析する、という方法がとられることである。そうすることで環境汚染要因と環境税の排出抑制効果とを結びつける2点連結的な視座が得られるから、検討する対象と範囲がより明瞭化できるようになることは確かである。しかし、その反面として、視野から外れた部分への波及効果や、系外から系内へのフィードバック効果が見落される結果、問題の肝心のポイントを見損なうのではないかとする疑念、不確実性、ないし危険が、常に付随する。

1.4 もう1つの特徴は、それらが例外なく、均衡を対象とした分析であることである。多数の合理的経済主体が行う主体的選択の束としての均衡状態において、環境税は外部性コストを内部化することに成功するかどうか、その内部化の程度は税の形態によってどの程度影響されるか、税率の変更は個々の経済主体の費用や便益にどう影響を与えるか、社会的厚生を向上させるためには既存の税と環境税はどのように組み合わせるべきか、などが検討される典型的問題であるが、その考察は、すべて均衡点においての——ないしはその変位を比較する形での——分析である。

均衡点では、定義によって、何がしかの効率性条件が必然的に成立する。しかしその存在性、およびそこへ至るための遷移プロセスの存在性は、とくに経済主体の限定された合理性を考慮しなければならないケースにおいては、けっして自明なことではない。もし不均衡状態から均衡状態への安定的な遷移プロセスが存在しないとしたら、均衡点だけを取り上げて、その状態での特質についてとやかく述べたところで、それは文字通り絵空事にすぎない。

1.5 本論文のロトカ・ヴォルテラ方程式にもとづく分析は、こうした標準的アプローチとはかなり異質である。その分、上に指摘した標準的アプローチへの疑問に答えるための、何か有益なヒントを得ることも期待できよう。

本論文の最重要な主張点は、環境税の影響が企業行動に波及していくメカニズムが「捕食・被食系ロトカ・ヴォルテラ微分方程式」を用いてモデル化できることを示すことにある。そのモデル化は、はじめ部分均衡論の枠内で行うが（第3節）、次の段階で、市場間の相互依存を明示的に考慮した一般均衡モデルへと拡張する（第4節および第5節）。ついで、環境外部性の内部化を目指す環境税政策は、市場間と企業間の関係に複雑な変動（カオス）を引き起こす可能性があることを明らかにした上で（第6節）、そうした変動を避けながら環境外部性の内部化を達成するための、環境税政策と安定化政策のポリシー・ミックスのありかたと可能性について検討する（第7節と第8節）。

## 第2節 生産にともなう負の外部性

2-1 競争市場で取引される財 $X$ について考える。任意の時点 $t$ における財 $X$ の市場価格は

$$p(t) = a - bx(t), \quad a, b > 0 \quad (2.1)$$

で与えられるものとする。ここに数量 $x(t)$ は、時点 $t$ における、1企業当りの財 $X$ の取引量である。

各企業はプライス・テイカーで、かつ同質的と仮定する。各企業の生産調整には一定の時間が必要であり、限界費用を製品価格に一致させるように、瞬時に生産調整することはでき

ないと仮定する。各企業は、瞬時にではなく、価格と限界費用の乖離幅に比例的な速さで、逐次的に、生産拡大ないし縮小を行うものとする。以上の想定の下では、各時点における代表的企業の生産調整は、 $p$ を財 $X$ の市場価格、 $m$ を代表的企業の限界費用として、

$$\frac{dx}{dt} = [p(t) - m]x(t) = [(a - m) - bx(t)]x(t) \quad (2.2)$$

のように行われると仮定できる。限界費用が価格を下回れば企業は生産量を増加し、逆に限界費用が価格を超過する場合には生産量を削減する。この調整が終了する時点では、 $dx/dt=0$ となって価格 $p$ と限界費用 $m$ は均等化し、企業利潤の最大化が達成される。以下では簡単化のために限界費用 $m$ は定数であり、しかも常に $a$ よりも小さいと仮定する。

2-2 財 $X$ の生産には、それに付随して、残余物、煤煙、汚水などの排出物ないし廃棄物の発生がともなうと仮定する。財 $X$ の生産量が $x$ のときの排出物発生量を $g(x)$ と表す。以下では、排出は生産に比例すると仮定する。さらに、生じた排出物のうち一部は、環境に備わる浄化機能によって、自然に消滅するものと仮定する。すなわち、

$$g(x) = \mu x - \theta, \quad \mu > 0, \quad \theta > 0. \quad (2.3)$$

ここに $\mu$ は財 $X$ の生産にともなう排出物発生率を表すパラメータであり、 $\theta$ は自然に備わる浄化力を表すパラメータである。

時点 $t$ までに環境中に累積した排出物の総量（ストック）は

$$G(t) = \int_0^t g(x(\tau))d\tau = \int_0^t [\mu x(\tau) - \theta]d\tau \quad (2.4)$$

と表すことができる（簡単化のために、排出物ストックの初期量はゼロと仮定する）。以下で、私は、浄化し切れずに環境中に滞積される排出物 $G(t)$ は、汚染物として人々の健康に被害を与えたり、景観を損ねたり、あるいは温室効果ガスとして地球温暖化を招いたりして、社会的コストを増殖的に増大させると仮定する。すなわち、浄化されずに環境中に蓄積される排出物総量が多ければ多いほど、それによる環境コストは加速度的に高まってゆくと考える。

これを数式として表現すれば、累積排出物 $G$ が生み出す社会的コストは

$$c(G) = \gamma e^{\delta G} \quad (2.5)$$

と表現することができよう。ここに、パラメータ $\gamma$ と $\delta$ は正の定数<sup>1</sup>、 $e$ は自然対数の底である。

時点 $t$ における累積排出物 $G(t)$ の社会的コストを $c = c(t)$ と表記すれば、その時間変化率は次のように計算される。

<sup>1</sup>  $\gamma$ は財 $X$ の生産とは独立の要因で発生する環境コスト、 $\delta$ は環境コストの財 $X$ の生産に付随して排出される廃棄物に対する弾力性を意味する。

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dG} \frac{dG}{dt} = \delta \gamma e^{\delta \gamma t} g(x(t)) = \delta [-\theta + \mu x(t)] c(t). \quad (2.6)$$

方程式 (2.6) が意味する内容は次の通りである。自然の浄化作用  $\theta$  が生産にともなう排出  $\mu x$  よりも勝っている場合には、残存する排出物のストック（ないしその社会的コスト）は、時間の経過とともに分解され消し去られていく。したがって、環境問題は顕在化しない。しかし、生産にともなう廃棄物発生が自然の浄化能力を超えてしまうと、その残余部分が廃棄物ストックへの追加分として環境中に積み重ねられ、累積的に負の外部性を悪化させていく。ここでは環境問題が立ち現れてくる。

2-3 財  $X$  の生産にともなう負の外部性に何ら手がかけられずに放置される場合、財  $X$  の市場と環境を囲む状況の推移を規定するのは、次の2本の微分方程式の体系である。<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [(a-m) - bx(t)]x(t), \\ \frac{dc}{dt} = \delta [-\theta + \mu x(t)]c(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

このシステムの性質は、立ち入った計算をするまでもなく、容易にその輪郭をつかむことができる。

(2.7) の第1式から、

$$\frac{dx}{dt} \geq 0 \Leftrightarrow (a-m) - bx \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{a-m}{b}$$

である。また、(2.7) の第2式からは

$$\frac{dc}{dt} \geq 0 \Leftrightarrow -\theta + \mu x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\theta}{\mu}$$

である。こうして、 $\theta/\mu > (a-m)/b$  であるか、あるいは  $(a-m)/b \geq \theta/\mu$  であるかに対応して、2つの異なった相図が  $(x, c)$  空間に描けることがわかる。

<sup>2</sup> 連立微分方程式の体系のことを、以下では、力学系、システム、などと呼ぶ。

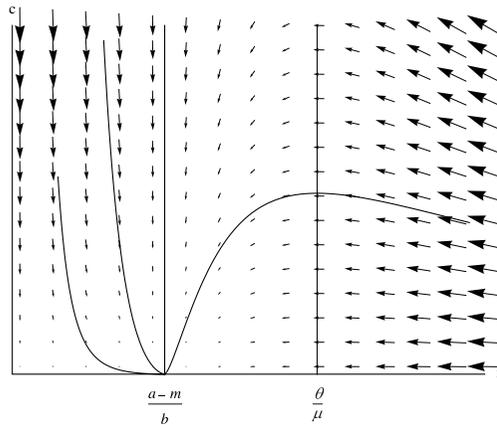


図 2.1

図2.1は $\theta/\mu > (a-m)/b$ の場合の相図である。このケースでは、自然の浄化力が十分に大きいので、生産にともなう負の外部性は放置されても問題にならない。いかなる出発点から始めても、十分な時間が経過すれば、自然の浄化力のおかげで、環境中に蓄積された廃棄物ストックは、やがてかならず減少に転じる。そして究極的には、このシステムの定常点（均衡点、休止点ともいう）において、廃棄物ゼロかつ価格と限界費用が均等化する最適状態が達成される。

それに対して、 $(a-m)/b \geq \theta/\mu$ のケースでは、生産にともなう負の外部性は自然の浄化力だけでは処理し切れない。図2.2がこの場合の相図を表す。時間経過とともに財 $X$ の生産は「価格＝私的限界費用」を満たす水準へと推移していくが、しかし生産にともなう廃棄物は浄化され尽くさずに環境中に積上げられ、外部性コストは無限大に向かって発散を続ける。生産にともなう負の外部性に対して何らかの抑止策をとらないかぎり、このケースでは環境はいずれ完全に破壊されてしまう。

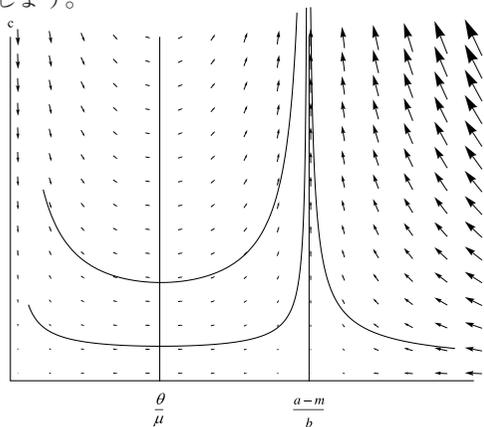


図 2.2

### 第3節 環境税の効果——単一市場のケース

3-1 廃棄物が累積し続ける状況下では、それを抑止するために環境政策を実施することが不可欠である。そうした是正的環境政策の中で最もポピュラーであるのは環境税政策である。本節では、前節の最後の箇所では取り上げたところの、放置すると環境コストが発散して破滅にいたるケースにおいて、環境税を導入することの効果を検討する。

環境税が導入されると外部性コスト（環境コスト）の無限大への発散は回避できる。さらにそれだけにとどまらず、負の外部性コストを正確に反映した税率で環境税が施行されるならば、定常状態において市場と環境の効率的バランスを実現することもできる。本節では、これらの2点を明らかにする。<sup>3</sup>

3-2 財Xの1単位分の生産増加にともなって追加的に生み出される廃棄物の量は、仮定 (2.3) によって

$$\frac{dg}{dx} = \mu \quad (3.1)$$

である。廃棄物1単位分の追加によって生じる環境コストの増加分は、仮定 (2.4) によって

$$\frac{dc}{dG} = \delta \gamma e^{\delta G} = \delta c \quad (3.2)$$

であるから、財Xの1単位の生産増加にともなう環境コストの追加分は、(3.1) に (3.2) を乗じて

$$z = \mu \delta c$$

と計算できる。こうして各時点ごとに、 $x(t)$  単位の財Xの生産に対して、政府によって、税率  $z(t)$ 、税額

$$T[x(t), c(t)] = z(t)x(t) = \mu \delta c(t)x(t) \quad (3.3)$$

で環境税が課せられるならば、代表的企業はこの税を支払うことを通して、自らの生産にともなう環境への負荷増加分を、時々刻々コンペイトすることになる。

3-3 以上に整理した環境税の導入は、数理的にみれば、システム (2.7) の第1式（代表的企業の生産調整式）へのフィードバック制御系の付加と同等である。もちろん、この制御系の操

<sup>3</sup> この結論は環境税を用いた「外部性の内部化」として経済学の基本的テキストでよく説明される事項である。ただし注意すべきは、この結論が成り立つためには（本論文の文脈においては）ことのほか強い仮定が必要とされることである。本論文の第5節と6節で示すように、2つ以上の市場が相互に関連しあう場合には、ここに述べた2つの結論のうち、確実に成立すると主張できるのは第1の結論だけになる。そうしたケースでは、環境税導入によって環境コストの無限大への発散は抑止できるが、パレート最適点の達成はかならずしも保証されない。

作は、政府が行うとする。環境税導入によってフィードバック制御系を付加されたシステムは、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [(a-m) - bx(t)]x(t) - T(t), \\ \frac{dc}{dt} = \delta [-\theta + \mu x(t)] c(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

と書き改められる。ここに  $T(t) = T[x(t), c(t)]$  は (3.3) で定義された環境税である。

政府は、各時点での財  $X$  の生産量  $x(t)$  と累積した廃棄物ストックが生む社会的コスト  $c(t)$  を観測し、それにもとづいて各時点での環境税  $T(t)$  をフィードバック制御量として計算し、これを財  $X$  の生産者に対して各時点ごとに課してゆく。

3-4 以下では、システム (3.4) で  $dx/dt = dc/dt = 0$  により定義される定常点  $(x^*, c^*)$  が、有限かつ大域的に安定であること、および、この定常点において、財  $X$  の生産・消費に関する社会的限界便益と社会的限界費用が均等化すること——つまり定常点  $(x^*, c^*)$  で効率的資源配分が達成されること——を説明する。

まずシステム (3.4) の定常点が有限かつ大域的に安定であることであるが、これは (3.4) が「2生物種・補食被食系・ロトカ・ヴォルテラ方程式」と同じ構造を有していることから容易に説明できる。実際、(3.4) の第1式の  $T(t)$  に (3.3) を代入して整理すると

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [(a-m) - bx(t) - \mu\delta c(t)]x(t), \\ \frac{dc}{dt} = \delta [-\theta + \mu x(t)] c(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

を得るが、これはまさしく変数  $x(t)$  を時点  $t$  における被食動物の個体数、 $c(t)$  を時点  $t$  における補食動物の個体数とする「2種・補食被食系・ロトカ・ヴォルテラ方程式」に他ならない。

第1部でみたように、「2生物種・補食被食系・ロトカ・ヴォルテラ方程式」の定常点には、原点  $(0,0)$  を除外すれば、被食種と補食種の2種がともに生存する共存解（内点解）と、補食種のみ絶滅する境界解の2つのものが存在する。そして共存解が存在する場合には、この共存解は大域的に安定であり、共存解が存在しない場合には、境界解が大域的に安定化する。なお、境界解は常に存在する。<sup>4</sup>

これと同じことが環境税によって制御系を付加されたシステム (3.4) についても成立する。定常点が内点解であるケースと境界解であるケースを、それぞれ、図 2.3 (1) および図 2.3 (2) の相図に表す。<sup>5</sup>

<sup>4</sup> ここで述べたことに関する詳しい説明は本論文シリーズ、第1部、48ページを参照されたい。

<sup>5</sup> 図 2.3 (2) は、自然の浄化力が十分に大きく、特別に環境政策を講じなくても問題が生じない場合に、敢えて環境税を導入した状況を示している。このケースでは、環境税の導入によって定常点が変わることはない。ただし、状態が定常点の近傍にいたるまでに要する時間は短縮することができる。

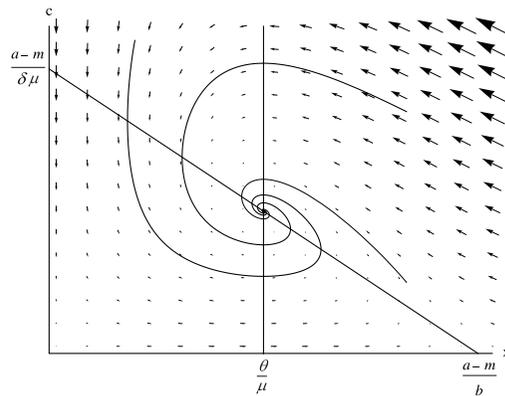


図 2.3 (1)

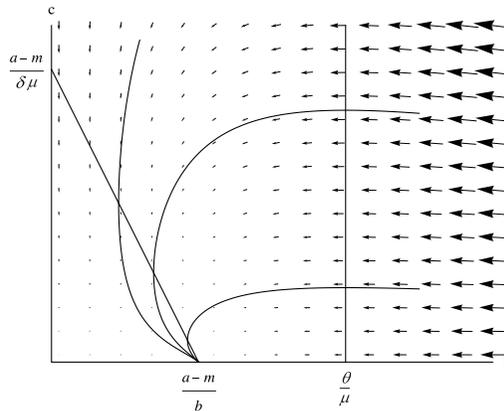


図 2.3 (2)

3-5 次に、システム (3.4) の定常点において、効率的な資源配分が実現されることを示そう。

実はこのことも、定常点において

$$\frac{dx}{dt} = [(a-m) - bx - z]x = [p - (m+z)]x = 0 \quad (3.6)$$

が成立していることに注意すれば、ほとんど直截的に明らかである。

実際  $p = a - bx$  は財  $X$  の競争市場価格、すなわち財  $X$  の消費の「社会的限界便益」である。それに対して、 $m$  は財  $X$  の生産にともなう私的限界費用、 $z = \mu\delta c$  は財  $X$  の生産にともなう負の外部性の限界費用で、これらの合計は「社会的限界費用」を構成する。

こうして (3.6) は、システム (3.4) の定常点  $dx/dt = 0$  において財  $X$  の「社会的限界便益」と「社会的限界費用」が均等化することを意味しており、したがって定常点では、この財の社会的純便益が最大化されていることがいえるのである。

## 第4節 モデルの拡張

4-1 本節では、第2節と第3節で設けた部分均衡論的分析枠をはずし、市場間の相互関連を明示的に取り扱うための拡張モデルを構成する。

以下では、2種類の財 $X_1, X_2$ の市場を取り上げる。これらの財の市場価格は、完全競争市場で定まる価格方程式（逆需要曲線）

$$\begin{cases} p_1(t) = a_1 - b_{11}x_1(t) - b_{12}x_2(t) \\ p_2(t) = a_2 - b_{21}x_1(t) - b_{22}x_2(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

にもとづいて決定されると仮定する。<sup>6</sup>

4-2 すべての企業はプライス・テイカーとして利潤最大化を目指す、生産調整には時間を要すると仮定する。各企業は、価格と限界費用とを均等化させるような生産量を即座に選択することはできないので、価格と限界費用の乖離幅に応じて、逐次的に、生産拡大・縮小の調整を行うと仮定する。こうした想定の下に、財 $i=1, 2$ の市場における代表的企業の生産調整式は

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [p_1(t) - m_1] x_1(t) = [(a_1 - m_1) - b_{11}x_1(t) - b_{12}x_2(t)] x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [p_2(t) - m_2] x_2(t) = [(a_2 - m_2) - b_{21}x_1(t) - b_{22}x_2(t)] x_2(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

と仮定される。ただし、ここに、 $m_i, i=1, 2$ は財 $i=1, 2$ の生産の限界費用である。前節までと同様、市場を介した生産面での相互依存は分析から捨象し、限界費用は一定値をとるものと仮定する。<sup>7</sup>

4-3 財 $i=1, 2$ の生産にともなって、排出物が環境中に放出されると想定する。各時点で環境中に追加される排出物の総量は

$$g(t) = \{\mu_1 x_1(t) + \mu_2 x_2(t)\} - \theta \quad (4.3)$$

と仮定される。パラメータ $\mu_i, i=1, 2$ は財 $i=1, 2$ の生産にともなう単位当り排出量を表す。した

<sup>6</sup> 以下では財 $X_1, X_2$ を財 $i=1, 2$ とも記す。なお(4.1)において、数量 $x_i(t)$ は時点 $t$ における企業1社当りでの財 $i=1, 2$ の市場取引量、 $a_i$ は財 $i=1, 2$ の需要曲線の縦軸切片の値、 $b_{ij}$ は財 $i$ に対する財 $j$ の粗代替性の程度を示すパラメータである。以下の分析では、これらの変数と数値は、すべて非負値をとるものと仮定する。また財 $i=1, 2$ について $a_i - m_i > 0$ を仮定する。

<sup>7</sup> 各市場の各企業は同質的と仮定する。限界費用が財の取引量に応じて変化する状況は、例えば(4.1)と類似した形で各企業の限界費用を定義することによって、モデル化することが可能である。しかしそうした一般化を行ったとしても、得られる結論に本質的な変更が生じるわけではない。したがって本論文ではそうした一般化は行わないこととし、生産サイド側での市場を介した相互依存関係は捨象することにした。

がって、右辺の  $\{ \}$  部分は時点  $t$  における各企業からの排出物の総量である。一方、 $\theta$  は、時点  $t$  において、自然が分解し浄化する排出物の総量である。

こうして  $g(t)$  は、浄化されずに環境中に残存する各時点の廃棄物総量を表すが、それは環境中に蓄積して、環境の質を悪化させてゆく。環境中に蓄積された廃棄物ストックによって生じる社会的コスト（環境コスト）は、第2節および第3節と同様に

$$c(t) = \gamma e^{\delta G(t)} \quad (4.4)$$

で表現できると仮定する。ここに  $G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$  は時点  $t$  での環境中の排出物ストックの総量である。環境コスト  $c(t)$  の時間変化率は、簡単な計算によって、

$$\frac{dc}{dt} = \delta[-\theta + \{\mu_1 x_1(t) + \mu_2 x_2(t)\}] c(t) \quad (4.5)$$

と求められる。

4.4 本節で行う準備的作業の最後として、外部性コストの原因者であるすべての企業に、それぞれが生み出す追加的環境コストの大きさに応じて、環境税が課されると仮定しよう。財  $i=1, 2$  の生産者が時点  $t$  において生み出す追加的環境コストは

$$T_i(t) = \frac{\partial c(t)}{\partial x_i} x_i(t) = \mu_i \delta c(t) x_i(t) \quad (4.6)$$

である。そこで、政府は、各時点において、この追加的費用と同額の環境税を、その原因者に対して課すものとする。そのときの各企業の生産調整式 (4.2) は次のように変更される。

$$\frac{dx_i}{dt} = [p_i(t) - m_i] x_i(t) - T_i(t), \quad i=1, 2. \quad (4.7)$$

4.5 こうして、単一市場だけを想定して構成された第3節の力学系モデル (3.4) は、2つの市場の相互関連を扱うべく拡張すると、

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [(a_1 - m_1) - b_{11}x_1(t) - b_{12}x_2(t)] x_1(t) - T_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [(a_2 - m_2) - b_{21}x_1(t) - b_{22}x_2(t)] x_2(t) - T_2(t), \\ \frac{dc}{dt} = \delta[-\theta + \{\mu_1 x_1(t) + \mu_2 x_2(t)\}] c(t), \end{cases} \quad (4.8)$$

と書き換えられる。(4.8) 右辺の  $T_i(t)$ ,  $i=1, 2$ , は (4.6) で定義された環境税，すなわち

$$T_i(t) = z_i(t) x_i(t) \quad (4.9)$$

である。ここに  $z_i(t) = \mu_i \delta c(t)$  は時点  $t$  における環境税率である。

## 第5節 環境税が導入されるとき競合的2市場間の相互関係

5-1 競合的2市場間の相互作用は、環境税が導入されていないときには、(4.2) により

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [(a_1 - m_1) - b_{11}x_1(t) - b_{12}x_2(t)]x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [(a_2 - m_2) - b_{21}x_1(t) - b_{22}x_2(t)]x_2(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

と表現できる。このシステムに対して、本論文シリーズの第2部、第2節で得た結果を適用すると、その相図は、以下に示すように、ケース1からケース4までのいずれかのパターンとして描くことができる。<sup>8</sup>

以下では、それぞれのケースごとに、環境税が導入されるとき市場取引への影響、ならびに環境税導入にともなう市場間関係（すなわち市場構造）の変化について検討してみよう。

ケース1：  $b_{12} = b_{21} = 0$  のとき。

これは、2つの財が互いに独立で、市場間の相互作用が存在しないケースである。このときの相図は図5.1に描かれている。

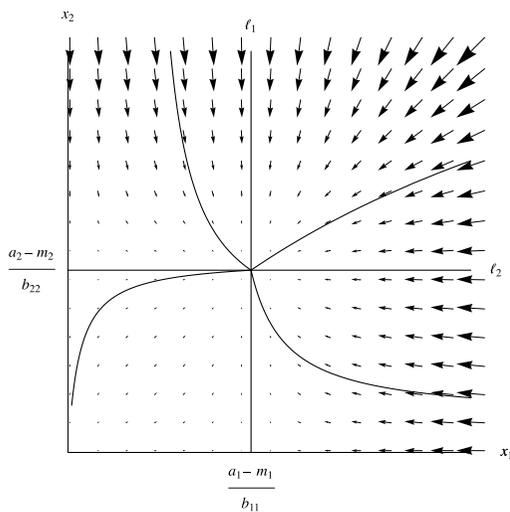


図 5.1

<sup>8</sup> 本文中のケース3において、変数の  $x_1$  と  $x_2$  を互いに入れ替えると

$$\frac{a_2 - m_2}{a_1 - m_1} b_{11} > b_{21} > 0, \quad b_{12} > \frac{a_1 - m_1}{a_2 - m_2} b_{22} > 0$$

なるもう1つのケースが得られるが、2つの財の立場が入れ替わることを除けば、ケース3と状況はまったく同等である。そのため本文中では、この最後のケースを取り上げることは省略した。

このケースに関していえば、環境税導入の効果はきわめて明瞭かつ単純である。独立した2つの市場を単純に1つにして眺めているだけのことであるから、2つの市場に環境税を課すことで、第3節で見たのとまったく同一の効果（外部性コストの内部化、社会的純生産物の最大化）が各市場で生み出される。それぞれの市場で課される環境税は、その内部だけに影響をとどめ、他市場には波及しない。したがって、環境税の導入は、独立した市場間のそれまでの関係に何ら変化をもたらさない。それぞれの市場において、外部性は、環境税導入によって、効果的に内部化される。

ケース2:  $\frac{a_2 - m_2}{a_1 - m_1} b_{11} > b_{21} > 0$ ,  $\frac{a_1 - m_1}{a_2 - m_2} b_{22} > b_{12} > 0$  のとき。

このケースでは、2つの財は互いに粗代替的な関係にあって、それゆえ市場間の相互作用は存在しているが、その相互作用は穏やかで、一定の閾内に収まっている。定常点において2種類の財は共存可能である。相図は図5.2に描かれている。

さて、このケースで環境税が導入された場合を検討しよう。

2つの財の市場取引量と環境コストの時間的変化はシステム (4.8) によって決まる。(4.8) から、とくに財1と財2に関する微分方程式を書き出せば、

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [(a_1 - m_1) - b_{11}x_1(t) - b_{12}x_2(t) - z_1(t)]x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [(a_2 - m_2) - b_{21}x_1(t) - b_{22}x_2(t) - z_2(t)]x_2(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

を得るが<sup>9</sup>、(5.1) と (5.2) を比較するとわかるように、環境税の導入によって2本のアイソクライン  $\ell_1, \ell_2$  は下方に向けてシフトする。<sup>9</sup> そして、そのシフト幅は、環境税率  $z_i(t)$  が高いほど大きくなる。

これは次を意味する。まず第1に、各財の生産にともなう環境コストが微少で、かつ、そのバラツキが2つの市場間で小さい場合には、アイソクラインの下方シフトはごくわずか、かつ対称的で、環境税が課されても定常点において2つの財は依然として共存関係を維持できる。

<sup>9</sup> 状態変数  $k(t)$  について、 $dk(t)/dt = 0$  を与える状態空間内の曲線を  $k$  に関するアイソクライン（等傾線）と呼ぶ。

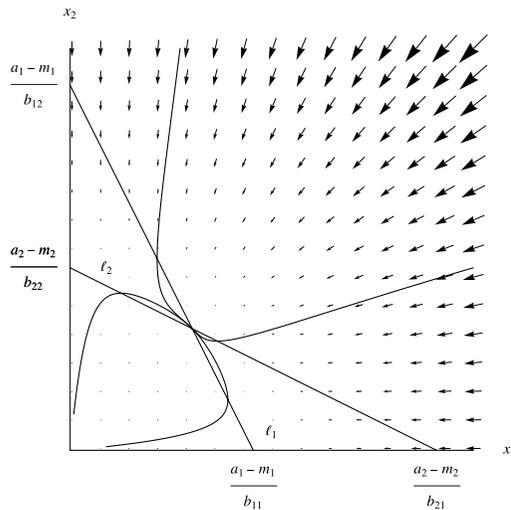


図 5.2

しかし第2に、2つの市場の環境コストが大きな格差をもつ場合には、高い税率で環境税が課される財の取引が縮小して、もう一方の財との競争に破れ、市場から排除されてしまうことも起こり得る。その場合、環境税の導入がきっかけとなって、競争的2市場関係は大きく変質し、共存の状況から、生き残りか消滅かの二者択一的状況へと、市場構造の質的变化が生まれることになる。

社会的純便益の最大化という視点からすれば、過大な環境負荷を生む財の市場が消滅することを合理化することは十分に可能である。しかし消滅を余儀なくされる当事者にしてみれば、環境税は著しい不利益をもたらすものとして、その導入阻止を強く望むであろうことも明らかである。

ケース3:  $b_{21} > \frac{a_2 - m_2}{a_1 - m_1} b_{11} > 0$ ,  $\frac{a_1 - m_1}{a_2 - m_2} b_{22} > b_{12} > 0$  のとき。

これは、財2が市場を介して財1の需要に与える影響は一定の閾内に収まるのに対して、財1が市場を介して財2の需要に与える影響はその閾値を超えるケースである。競争力に勝る財1が、競争力に劣る財2の市場を侵食し、定常点では財1の取引しか行われない。こうして財2の市場はいずれ消滅してしまう。相図は図5.3に描かれている。

このケースでも、システム (5.2) のアイソクラインの変化を分析することで、環境税が導入されるときに起こる市場構造変化の概略をつかむことができる。

もともと競争面で優位にある財1の取引は、もし環境面でも優れていれば、環境税が導入されても依然として優位に立ち続けることができる。逆に、はじめ競争力で優位にあっても、

環境面で目立って劣悪である場合には、環境税が導入されると過重な負担が加わるようになって、当初の優位な地位を失ってしまう。その場合には、環境税が導入されない場合には消滅したはずの財2の市場取引が勢いづいて、財1とともに定常状態の下に共存するということが起こる。場合によっては、過重な環境税支払いのために財1が市場での優位性を失い、それまでの地位を財2へ譲り渡すといった事態も起こり得る。

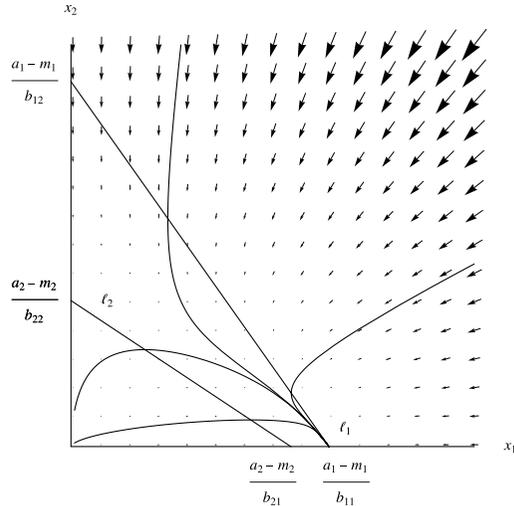


図 5.3

なお、先にも述べたように、環境税の導入によってアイソクラインは、環境税率 $z_i(t)$ の幅だけ下方へシフトするが、この環境税率それ自体も、時間とともに変動することに注意しなければならない。とりわけ、環境税が導入された結果として2種類の財が市場で共存ようになる状況下では、環境税率および環境税額の変動が複雑化し、そのために、状態変動が著しく複雑化してしまうということが起こり得る。いわゆる「カオス」の発生である。これについては次節以降において、別途、詳しく論じることとする。

ケース4：  $b_{21} > \frac{a_2 - m_2}{a_1 - m_1} b_{11} > 0$ ,  $b_{12} > \frac{a_1 - m_1}{a_2 - m_2} b_{22} > 0$  のとき。

これは2財とも市場を介して他財の需要に与える影響が一定の閾値を超えるケースである。内点解としての定常点は存在するが、このケースでは、この定常点は不安定化し、それに代わって2つの境界解が安定化する。相図は図5.4に描かれている。

このケースで環境税が導入されるときに市場間の関係への影響は、基本的にはケース2で見たものと同様である。ただし、ここでの内点解（共存解）は不安定な定常点であるから、ほとんどすべての場合において、財1と財2がともに市場で取引されることは期待できない。す

なわち、このケースでは、2つの財市場のうちのどちらか1つがほとんど確実に消滅する。

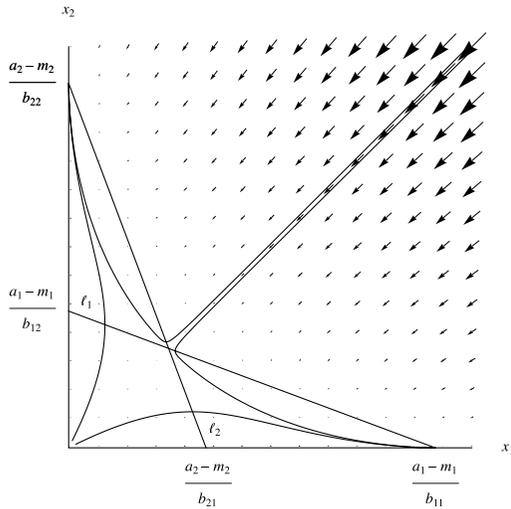


図 5.4

5-2 以上の分析が示すように、複数種類の財の生産において環境コストが発生するケースでは、環境税政策が実施されると、これらの財の市場取引量のみならず、市場間関係にもさまざまな動態的影響が波及する。市場間関係ないし市場構造へのそうした影響を考慮しないで済むのは、そもそも市場間関係が存在しないか、あるいは存在しても無視してよいほどにわずかであるような、きわめて制限的な状況だけである。

このように、環境税の効果を評価する場合には、内点解が存続するとの前提に立って環境税導入の内部化効果を点検するだけでは不十分なわけで、同時に市場間の相互関係から生じる複合的な影響について、注意深く検討することが求められることになる。

## 第6節 環境税と市場取引の不規則変動

6-1 環境税が導入されたときの2種類の財の市場取引量  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  と環境コスト  $c(t)$  の時間的変化は、第4節で定義したシステム (4.8)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [(a_1 - m_1) - b_{11}x_1(t) - b_{12}x_2(t)]x_1(t) - T_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [(a_2 - m_2) - b_{21}x_1(t) - b_{22}x_2(t)]x_2(t) - T_2(t), \\ \frac{dc}{dt} = \delta[-\theta + \{\mu_1x_1(t) + \mu_2x_2(t)\}]c(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

によって記述できる。ここに  $T_i(t)$  は、それぞれの財の生産者に対して課される環境税であり、

$$T_i(t) = z_i(t)x_i(t) = \mu_i \delta c(t)x_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (6.2)$$

と定義される。本節ではこの力学系を対象に数値解析を行う。

6.2 環境面で劣った財に高額な環境税が賦課され、しかも環境税が課されないときには成立していたこの財の市場における優位性が、環境税が課されることで失われてしまうようなケースでは、第5節、ケース3でも述べたように、市場取引や環境コストに複雑な変動が生じる可能性がある。

このことを詳しくみるために、以下ではシステム (6.1) のパラメータに関して次の2つの制約を置くことにする。第1の制約は

$$\begin{cases} a_1 - m_1 > a_2 - m_2 > 0, \\ b_{21} > b_{11} > 0, \\ b_{22} > b_{12} > 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

である。この制約は、財1と財2の限界純便益（すなわち、価格  $p_i$  マイナス限界費用  $m_i$ ）が、すべての財取引  $x_1, x_2 \geq 0$  のもとに

$$(p_1 - m_1) - (p_2 - m_2) = (a_1 - m_1) - (a_2 - m_2) - (b_{11} - b_{21})x_1 - (b_{12} - b_{22})x_2 > 0$$

なる関係を満足することの必要十分条件になっている。環境税が課されない場合には、財1は財2よりも市場においてより優勢な地位を占めるということが、この制約の下で成立する。

第2の制約は

$$\frac{\mu_1}{a_1 - m_1} > \frac{\mu_2}{a_2 - m_2} > 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\mu_1}{a_1 - m_1} > 0 > \frac{\mu_2}{a_2 - m_2}. \quad (6.4)$$

である。この制約は、財2が財1よりも環境面で優れていること——単に排出レベル  $\mu_i$  で見ても、財2が財1より優れているというだけでなく、最大限界純便益あたりの排出レベル  $\mu_i / (a_i - m_i)$  で見ても、財2の方が財1よりも優れていること——を意味するものである。<sup>10</sup>

6-3 次にシステム (6.1) の  $\theta$  を除く各パラメータの値を、(6.3) と (6.4) の制約を満たすように、たとえば

<sup>10</sup> ここでは、パラメータ  $\mu_1$  は常に正值をとるのに対し、 $\mu_2$  は負値をとることもあると仮定する。たとえば、財1はバージン原料から製造される通常の製品、財2は財1の廃棄物を原料とする“リサイクル”製品とすれば、 $\mu_1 > 0$ 、 $\mu_2 < 0$  が成立するであろう。なお、 $\mu_i < 0$  であるとき (6.2) は環境“補助金”となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 - m_1 = 5.00, \\ b_{11} = 0.51, \\ b_{12} = 0.49, \\ a_2 - m_2 = 4.99, \\ b_{21} = 0.75, \\ b_{22} = 0.50, \\ \mu_1 = 3.00, \\ \mu_2 = -0.20, \\ \delta = 1.00 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

と固定する。

このようにパラメータの値が与えられたとき、(6.1) は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = [5.00 - 0.51x_1(t) - 0.49x_2(t) - 3.00c(t)]x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [4.99 - 0.75x_1(t) - 0.50x_2(t) + 0.20c(t)]x_2(t), \\ \frac{dc}{dt} = [-\theta + \{3.00x_1(t) - 0.20x_2(t)\}]c(t). \end{array} \right. \quad (6.6)$$

と書き改められる。本論文の終節、補論1で証明される〈命題1〉を適用すると、システム(6.6)が内部定常点  $E = (x_1^*, x_2^*, c^*) > 0$  をもつためには、パラメータ  $\theta$  は次の区間条件

$$-2.00 < \theta < 20.4 \quad (6.7)$$

を満足しなければならないことがわかる。<sup>11</sup>

そこで、次のような思考実験を考えてみよう。当初、自然の浄化力は十分に大きくて、そのレベルを示すパラメータ  $\theta$  は区間条件(6.7)の上位の数値をとっていたとする。しかし、何らかの外的原因によって自然の浄化力が次第に衰微し、 $\theta$  の値が区間(6.7)のなかで、少しずつ減少していく状況を想定してみる。

補論1の〈命題2〉を適用すると、パラメータ  $\theta$  のこうした下降局面において、(6.6)の定常点  $E$  は

$$\begin{array}{lll} 20.4 > \theta > 8.35 & \text{のとき} & \text{漸近安定であり,} \\ 8.35 > \theta > -1.96 & \text{のとき} & \text{不安定化し,} \\ -1.96 > \theta > -2.00 & \text{のとき} & \text{再び漸近安定化する,} \end{array} \quad (6.8)$$

ということがいえる。<sup>12</sup>

<sup>11</sup> 〈命題1〉で与えられる条件  $\mu_2\beta < \theta < \mu_1\gamma$  にパラメータ制約(6.5)の数値を代入することで区間条件(6.7)が得られる。なお、数値は4桁まで計算し、最後の桁を4捨5入している。以下も同様である。

<sup>12</sup> 〈命題2〉で与えられる条件のうち  $\det(B) < 0$  は(6.5), (6.7)の下で常に満足される。もう1つの条件

$$k_1 k_2 - k_0 > 0$$

の左辺は、パラメータ制約(6.5)の下では、 $\theta$  の3次関数  $P[\theta]$  となる。区間(6.8)の端点は  $P[\theta] = 0$  の根として求められる。

6-4 以下では、これらの各区間に含まれる  $\theta$  をいくつか選び、それをシステム (6.6) に代入して計算し、そうして得られた解曲線を実際にグラフに描いてみる。<sup>13</sup>

ケース1:  $20.4 > \theta > 8.35$  のとき。

システム (6.6) が内部定常点  $E = (x_1^*, x_2^*, c^*) > 0$  をもち、しかもこの定常点は漸近安定となるケースである。この区間条件を満たすようにパラメータを

$$\theta = 10.0$$

と選び、これを (6.6) に代入して解曲線を計算する。そうして得られた解曲線上の、各状態変数の時間変動をグラフに描いたものが図6.1である。

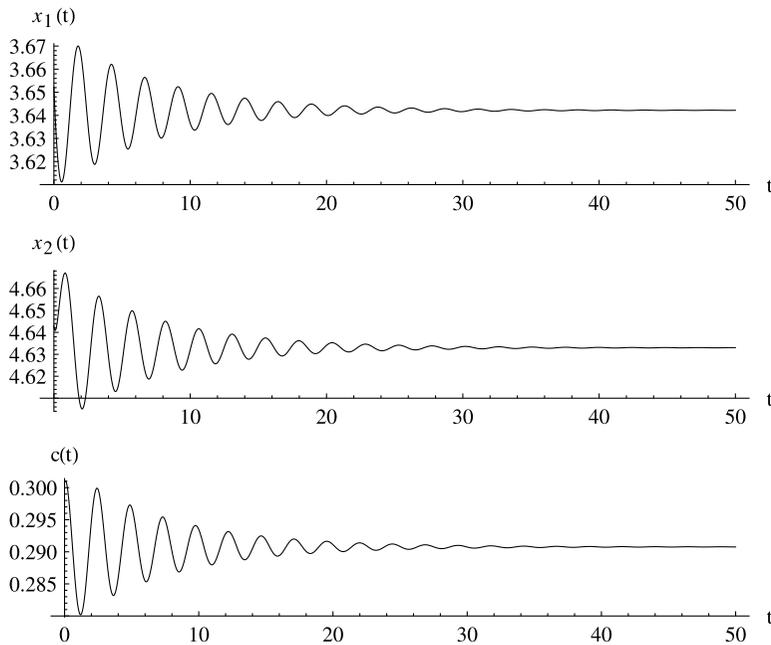


図 6.1

このときの内部定常点は

$$(x_1^*, x_2^*, c^*) = (3.64, 4.63, 0.291)$$

であるが、時間経過とともに  $(x_1(t), x_2(t), c(t))$  は  $(x_1^*, x_2^*, c^*)$  に収束していくことを図6.1で確認できる。

<sup>13</sup> 以下では、初期点  $E$  を内点解の近傍にとり、これを始点とする解曲線を描くこととする。本論文におけるすべての数値計算とグラフ作成には、Wolfram Research社の Mathematica 8 を用いた。

ケース2:  $8.35 > \theta > -1.96$  のとき。

内部定常点  $E$  が不安定化するケースである。この区間条件を満たすようにパラメータを

$$\theta = 7.00$$

と選び、対応する解曲線上の状態変数の時間変動をグラフに描いたものが図6.2である。

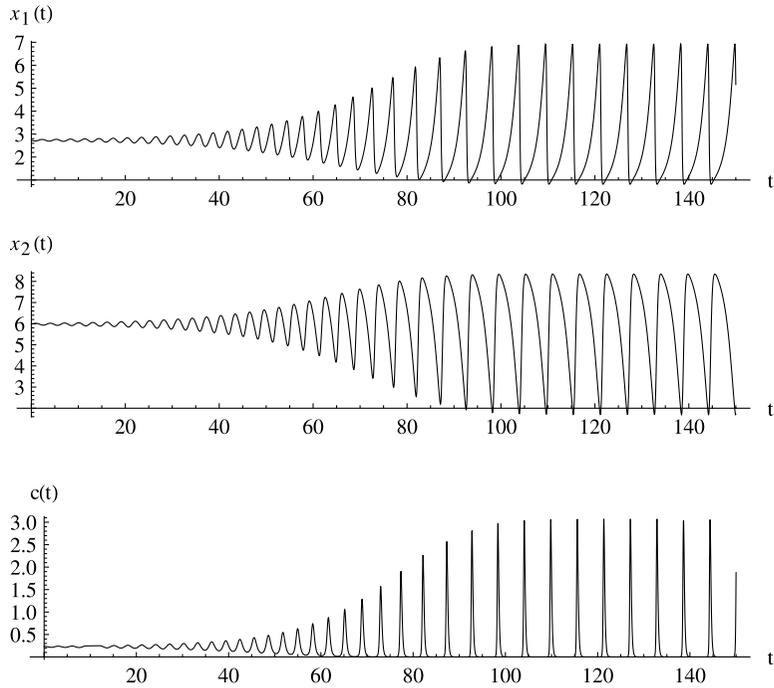


図 6.2

このケースでは内部定常点  $E$  は

$$(x_1^*, x_2^*, c^*) = (2.73, 5.97, 0.227)$$

である。図6.2からわかるように、 $E$  の近傍に初期点をもつ  $(x_1(t), x_2(t), c(t))$  は、時間の経過とともに次第にそこから離れていくが、しかし他の（内部定常点以外の）定常点に向かって移動するようになるわけではない。 $E$  の周辺に1つの輪（リミット・サイクル）ができ、その周辺の点はこの輪に巻き付くように変動する。そして、いったんこの輪に到達してしまうと、その後は、この輪の上で永久的な循環運動を繰り返す。

次に、同じ区間内で、パラメータを

$$\theta = 5.20$$

と選び、対応する解曲線上での状態変数の変動を求めてみる（図6.3）。

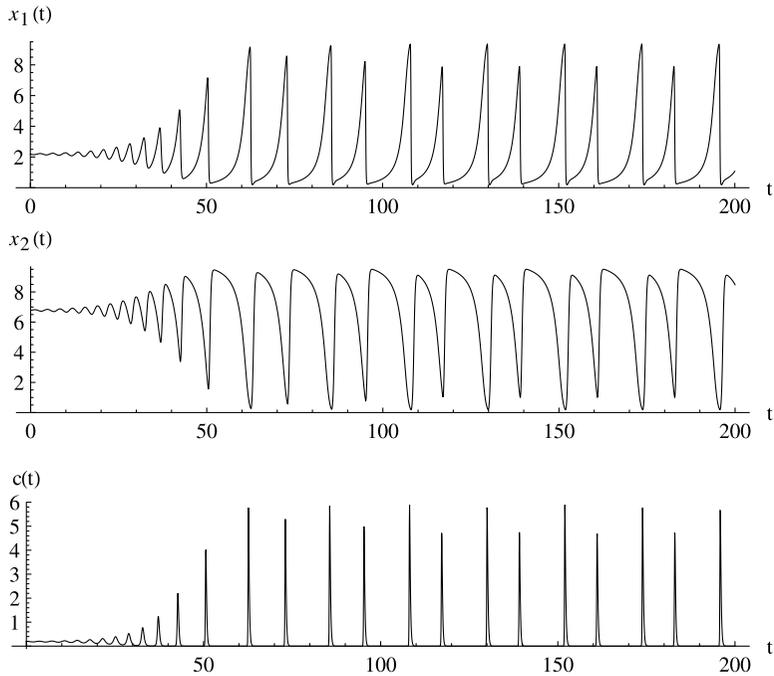


図 6.3

ここにもリミット・サイクルが現れるが、その形状は  $\theta = 7.00$  と比べて幾分か複雑化している。すなわち、 $\theta = 7.00$  のときにはリミット・サイクルは内部定常点を中心とする1重の輪であったのに対して、 $\theta = 5.20$  のときには、それは2重の輪になり、いわゆる“倍周期化”という分岐現象が起きている。なお、このときの  $E$  の座標は

$$(x_1^*, x_2^*, c^*) = (2.19, 6.78, 0.188)$$

である。

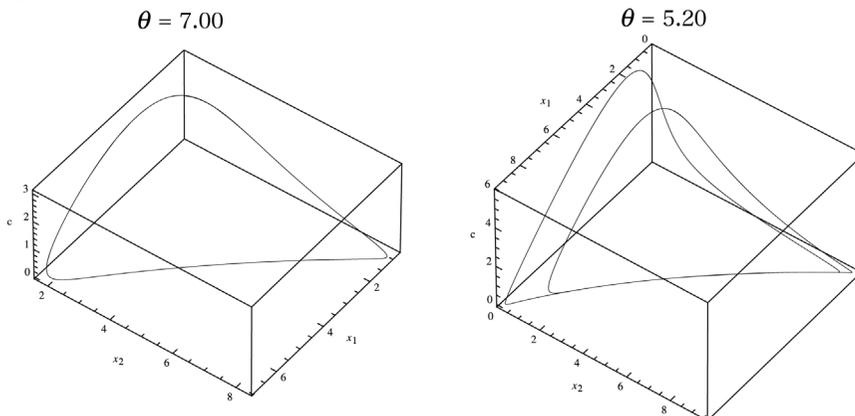


図 6.4

図6.4に  $\theta = 7.00$ , および  $\theta = 5.20$  の各ケースでの, 時間が十分に経過した後に得られる解曲線の3次元グラフを示しておく。 $\theta = 7.00$  では1重のリミット・サイクルが現れているのに対して,  $\theta = 5.20$  では2重のリミット・サイクルが現れている。

$\theta$ をさらに減少させていくと, リミット・サイクルの分岐が繰り返し生じて, 解曲線は一層複雑化し, ついにはその極限に達して, 非周期的な有界変動をするようになる。

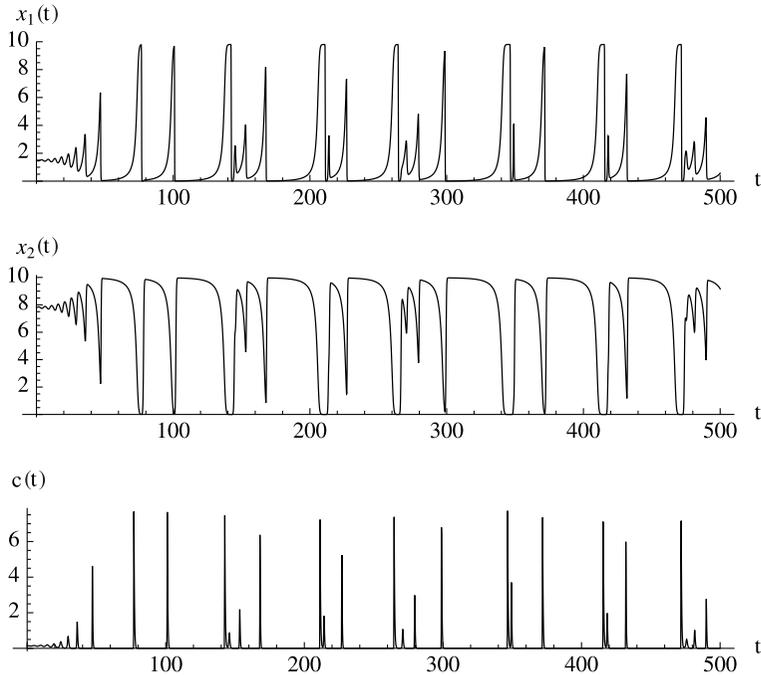


図 6.5

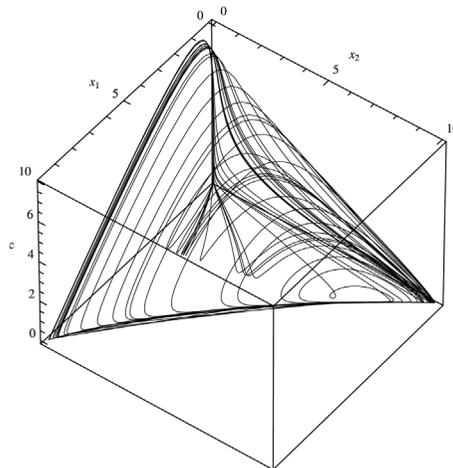


図 6.6

図6.5では,

$$\theta = 2.90$$

と置いて, 状態変数のそのようなカオス的変動を描いている。この場合の内部定常点 $E$ の座標は

$$(x_1^*, x_2^*, c^*) = (1.49, 7.81, 0.139)$$

である。図6.6は, このときの(時間が十分に経過した後)に得られる) 解曲線のグラフ(ストレンジ・アトラクタと呼ばれることもある)である。

ケース3:  $-1.96 > \theta > -2.00$  のとき

$\theta$  の値がさらに減少し区間条件の下限に近づくと, 対応する解曲線は単純なリミット・サイクルを含むようになる。そして  $\theta$  がこの境界を超えてさらに減少すると, 内点解 $E$ が再び漸近安定化して, 解曲線も単純な曲線へと戻る。図6.7では

$$\theta = -1.99$$

のときの解曲線上の状態変数の時間変動が描かれている。調整に必要な時間は長期化するものの, 均衡点 $E$ は漸近安定化していることを確認できる。

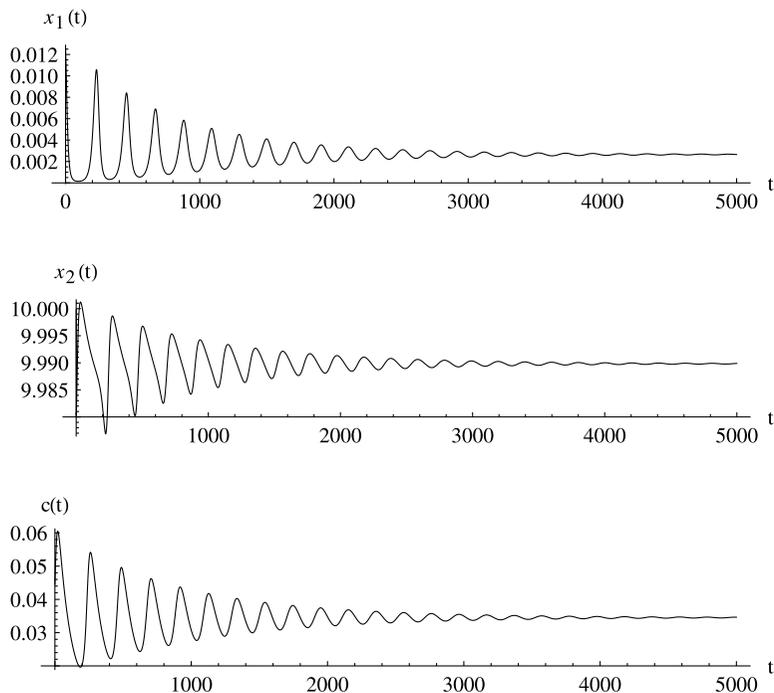


図 6.7

6-5 パラメータ  $\theta$  が区間 (6.7) の範囲内で変化するとき、システム (6.6) の解曲線上の、時間が十分に経過した後において出現する状態は、どのように分布することになるであろうか。

時間が十分経過した時点以降の解曲線部分が、内部定常点を含む (状態空間内にあらかじめ与えられた) 1平面と交わってできる交点  $(x_1, x_2, c)$  の集合  $V(\theta)$  を考えよう。 $\theta$  がケース1の区間内であって内部定常点が漸近安定であるときには、 $V(\theta)$  にはこの内部定常点1点だけが含まれる。しかし、 $\theta$  がケース2の区間内であって内点解が不安定化し、リミット・サイクルが生じる場合においては、 $V(\theta)$  には複数の点が含まれるようになり、リミット・サイクルが倍周期分岐を繰り返すたびに、その要素数は増えていく。そして、カオス状況にいたるところでは、 $V(\theta)$  には限りなく多数の状態が含まれるようになる。

図6.8にそのような集合を表した。ただし、この図の縦軸上にプロットしてあるのは  $V(\theta)$  に含まれる状態の  $x_2$  成分だけである。

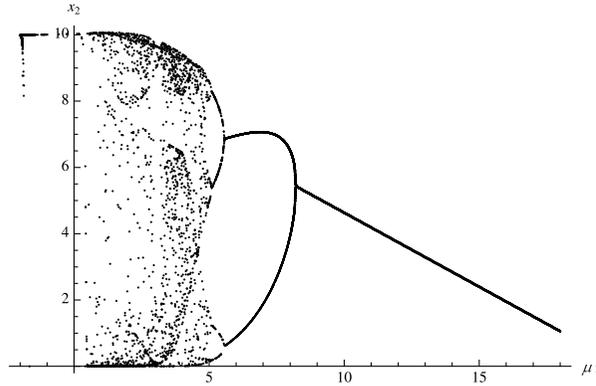


図 6.8

## 第7節 内部化と安定化のためのポリシー・ミックス

7-1 本論文で想定した企業行動は、次の意味で近視眼的である。すなわち、各企業にとって、情報処理や資源調達的能力は限定的で、大域的な利潤最大化点を瞬時に選択し、これを一挙に達成するという離れ業は実行できない。それぞれの企業は、むしろ自己利益の変動に関する個別的、局所的な情報を判断材料にして、各時点での微小な生産調整を積み重ねながら、より大きな利益獲得に向けて努力を続けざるを得ないと想定されている。

本論文で想定した環境税政策も、同じ意味で近視眼的である。政府の能力は限定的で、社会的純生産物の大域的最大化を一挙に実現するような理想的環境税を設計する能力はない。政府は、その代わりに、各時点で各企業が生み出す限界的な外部費用情報にもとづいて暫定的環境税を設定し、これを逐次的に調整しながら状況の改善に努める。

システム (6.1) が記述するのは、企業と政府のこうした“限定合理的”な行動様式の下に出現する経済状態の変動の様子である。前節で見たように、この変動はときとして周期的な循環であったり、場合によっては複雑で予測困難なカオス的な変動であったりする。

このシステムの内部定常点では、導入された環境税の定義によって、社会的純生産物を最大化するための効率性条件、すなわち「社会的限界便益と社会的限界費用の均等化」が確かに成立している。しかし、リミット・サイクルやカオスの状況では、初期点がたまたま内部定常点であるケースを除いて、経済状態はこの定常点には決して到達し得ない。内部定常点から外れたまま、永遠に非効率的な変動を続けるのである。

この結論は、すべての経済主体の“完全合理性”を暗黙のうちに仮定する標準的な環境税モデルが導き出す帰結と較べてみると、きわめて対照的である。

7-2 環境税が導入されたときに生じる市場取引の不規則変動は、どのようにしたら鎮静化することができるだろうか。以下で、そのための2つの方法（ないし可能性）について述べる。

本節では第1の方法について述べよう。図7.1には4本の曲線 $L_1, L_2$  および $M_1, M_2$ が描いてある。これらの曲線は、財1の生産者の排出パラメータ $\mu_1$ 、および自然の浄化力パラメータ $\theta$ 以外のすべてのパラメータを(6.5)と同じ水準に固定化し、数値計算を施して求めた曲線である。<sup>14</sup>

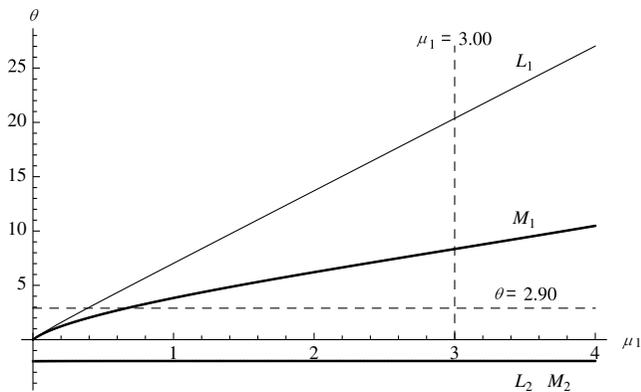


図 7.1

図7.1の曲線 $L_1, L_2$ は、終節、補論1に示した〈命題1〉における(1)の不等式

$$\mu_2 \beta < \theta < \mu_1 \gamma \quad (7.1)$$

の境界条件を与える曲線である。〈命題1〉から分かるように、これらの曲線に挟まれた $(\mu_1, \theta)$

<sup>14</sup>  $L_2$ と $M_2$ とは、それぞれの $\mu_1$ に対して $\theta$ の値に殆ど差がないので、図7.1では、これらの曲線は、ほぼ重なって描かれている。

の組合せの下では、システム (6.1) に内部定常点が存在することが保証される。

もう1組の曲線  $M_1, M_2$  は、補論1における〈命題2〉の不等式 (A28) の境界条件を示す曲線である。これらの曲線で挟まれた  $(\mu_1, \theta)$  の組合せについては

$$k_1 k_2 - k_0 \leq 0 \tag{7.2}$$

が成立する。これらの組合せは (7.1) を満たすので、〈命題1〉によって内部定常点は存在するが、しかし〈命題2〉によってその内部定常点は不安定ということになる。

前節では、 $\mu_1 = 3.00$  と置き、 $\theta = 20.3699$  から  $\theta = 1.99875$  の範囲で  $\theta$  を次第に減少させていったときの解曲線の変化を眺めた。<sup>15</sup> 図7.1でこの作業を改めて振り返ってみると、それは、破線  $\mu_1 = 3.00$  の線上を上から下へと移動したときの、対応するシステム (6.1) の解曲線において生起する分岐を見たものといえる。

パラメータ  $\mu_1$  の変化にともなう解曲線の分岐の様子も、これと同様に図に描くことが可能である。パラメータ  $\theta$  を一定値に固定し、もう一方のパラメータ  $\mu_1$  を変化させてみる。

とくに  $\theta = 2.09$  として、パラメータ  $\mu_1$  を 0 から 5.5 まで変化させたときのシステム (6.1) の解曲線の分岐図を描いたものが図7.2である。この図からは、 $\mu_1$  値の減少につれて、解曲線上での状態変化の複雑度が緩和されていくこと、 $\mu_1$  が 0.6 を下回るようになると内部定常点が漸近安定化することを確認できる。<sup>16</sup>

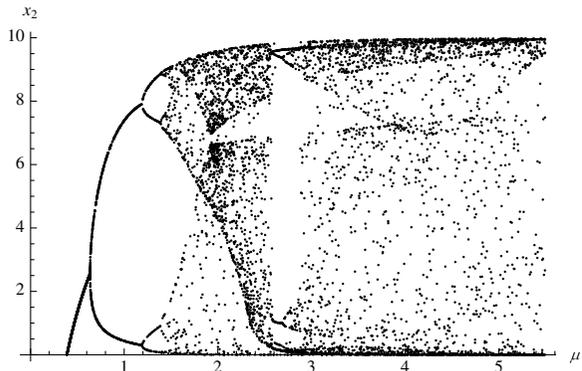


図 7.2

7-3 以上の説明から明らかなように、図7.1の曲線  $L_1$  と曲線  $M_1$  で挟まれた領域のパラメータの組合せに対しては、システム (6.1) は漸近安定な内部定常点をもつ。したがって、環境税政策は、この領域を実現することを目標として、遂行されるべきである。

<sup>15</sup> その分岐の様子をまとめたものが前節の図6.8である。

<sup>16</sup> 図7.2から分かるように、 $\mu_1$  がさらに減少して 0.4 を下回るようになると、定常点は内点解から境界解へと転移し、そこでは財2の取引は消滅し、財1のみ取引されるようになる。

すなわち、破線  $\mu_1 = 3.00$  の線上で考えるのであれば、パラメータ  $\theta$  はより大きな値をとるように維持すること、破線  $\theta_1 = 2.90$  の線上で考えるのであれば、パラメータ  $\mu_1$  はより小さな値をとるように維持すること、こうしたパラメータ調整の実施がともなうのであれば、環境税政策は、複雑な経済変動を招くことなく、外部性コストの内部化を実現することに成功する。

本節の結論をまとめよう。パラメータ  $\theta$  の値を高い水準に維持するということは、自然を豊かに保つということに他ならない。そのためには、行き過ぎた経済開発を防止すること、緑化や植林を進めること、自然環境に適切な管理の手を加えてその保全に努めること、などが求められる。

一方、パラメータ  $\mu_1$  の値を低い水準に抑制するためには、すべての企業の生産プロセスにおいて、排出削減が進むこと、リサイクル、省エネルギー、代替エネルギー等の環境技術が展開すること、などが求められる。

いずれにしても、こうした自然保護、環境保全、環境技術革新への“長期的”な努力がともなってはじめて、環境税政策は本来の役割を果たすことができるようになるという点を理解することが重要である。

## 第8節 カオス・コントロール

8-1 環境税の導入によって生起する経済変動への対応策として、制御理論 (control theory) から示唆されるもう1つの可能性について触れておきたい。前節で説明したパラメータ調整をともなう環境税政策を長期的な政策とすれば、以下に示す方法は、固定的パラメータを所与として実施される短期的環境政策ということができよう。<sup>17</sup>

ここでは、とくに、第6節、ケース2の、自然の浄化力パラメータを  $\theta = 2.90$  と置いたシステム

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [5.00 - 0.51x_1(t) - 0.49x_2(t) - 3.00c(t)]x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [4.99 - 0.75x_1(t) - 0.50x_2(t) + 0.20c(t)]x_2(t), \\ \frac{dc}{dt} = [-2.90 + \{3.00x_1(t) - 0.20x_2(t)\}]c(t) \end{cases} \quad (8.1)$$

を考える。図6.5と図6.6でみたように、このときの市場取引と環境コストは複雑で予想困難な不規則変動を繰り返す。そこで、このシステムの第1式と第2式に対して、新たなフィード

<sup>17</sup> 私としては、この短期的手法の有効性を主張する意図は、まったく持っていない。そうした発想にもとづく政策的思考に対して一種の警告を発することこそが、むしろ本意とするところである。

バック制御項

$$R(t) = 7.67\{x_1(t) - x_1^*\} - 0.327\{x_2(t) - x_2^*\} + 6.17\{c(t) - c^*\} \quad (8.2)$$

を追加したシステム

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [5.00 - 0.51x_1(t) - 0.49x_2(t) - 3.00c(t)]x_1(t) - R(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [4.99 - 0.75x_1(t) - 0.50x_2(t) + 0.20c(t)]x_2(t) - R(t), \\ \frac{dc}{dt} = [-2.90 + \{3.00x_1(t) - 0.20x_2(t)\}]c(t), \end{cases} \quad (8.3)$$

を考えてみる。なお (8.2) の  $R(t)$  の係数から成るベクトル  $f = (7.67, -0.327, 6.17)$  は、システム (8.1) の内部定常点

$$(x_1^*, x_2^*, c^*) = (1.49, 7.81, 0.139) \quad (8.4)$$

の周りで計算した線形化システムに対して、いわゆる“極配置法”を適用して求めたフィードバック・ゲインである。<sup>18</sup>

フィードバック制御項  $R(t)$  の経済的な意味は、安定化を目標として政府が各企業に課すところの補正的課税と解釈できる。以下では、 $R(t)$  を、“安定化補正税”と呼ぶ。フィードバック・ゲインおよびそれにもとづく安定化補正税 (8.2) の計算はかなり煩雑であるので、その説明は別途、最後の節の補論2で行う。

8-2 図8.1には、システム (8.3) の下での各状態変数の時間的変化が描かれている。この図から明らかのように、安定化補正税  $R(t)$  が賦課された結果として、 $t=3$  程度の遷移時間のうちに、すべての状態は、きわめてスムーズに、内部定常点 (8.4) ——その水準は破線で示されている——に向かって収束していく。

また、図8.2には環境税  $T_i(t), i=1,2$  の時間的変化が、また図8.3には安定化補正税  $R(t)$  の時間的変化が、それぞれ描かれている。これらの変数の数値も、 $t=3$  程度の遷移時間のうちに、スムーズに一定値へと収束していく。

<sup>18</sup> ここでは、極配置法において指定する固有値は  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-9, -2, -1)$  と仮定している。

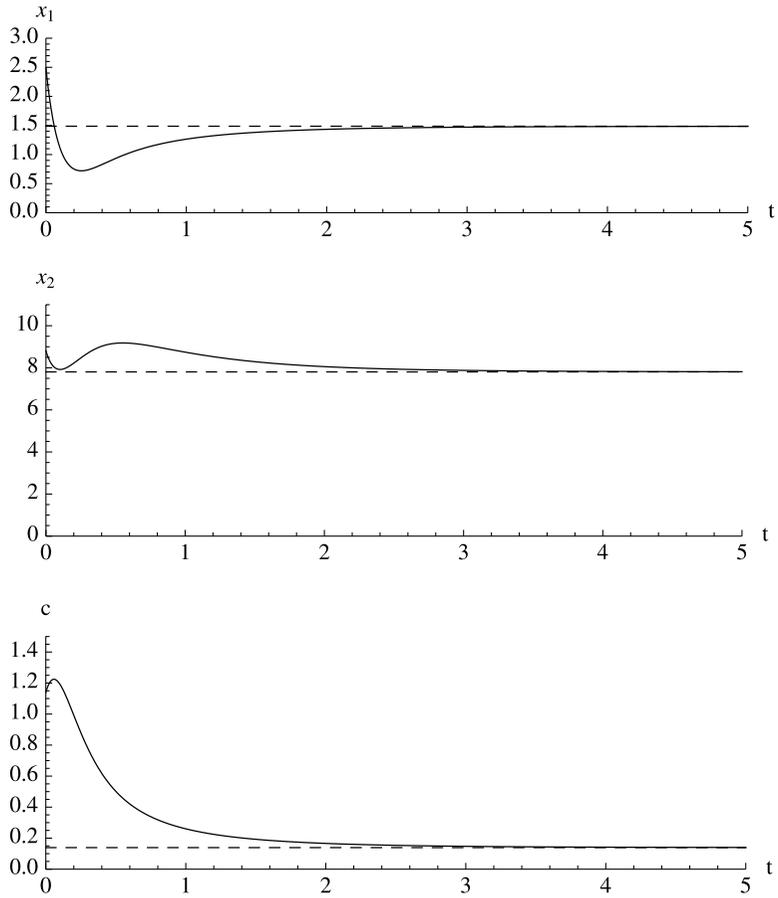


図 8.1

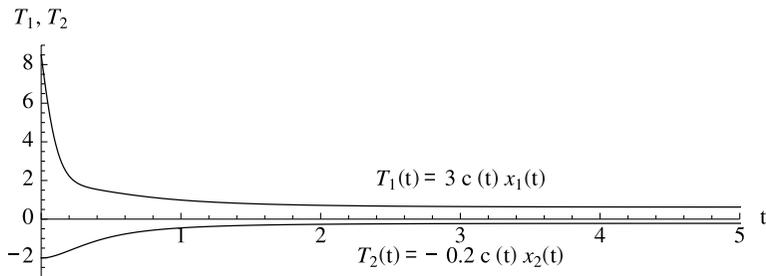


図 8.2

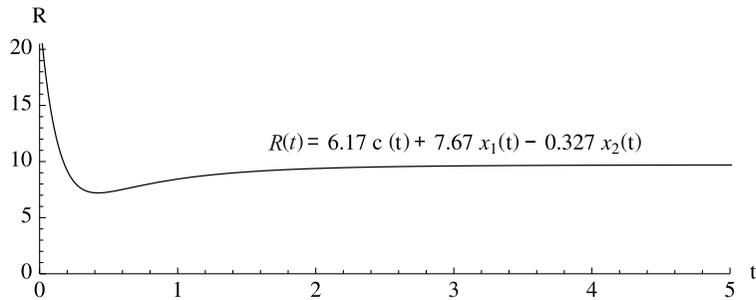


図 8.3

8-3 このように、環境税を導入したことで経済に不規則変動が生じたとしても、それと並行して、適切に定義された安定化補正税を導入することが可能であれば、パラメータ条件を改善するまでもなく、政府はその不規則変動を消去できるということがいえる。

もっとも、その定義式 (8.2) から明らかなように、安定化補正税を算定するには元々のシステムの構造に関する情報と、内部定常点の座標情報とが必要とされるので、そうした作業が近視眼的政府の能力を超越する仕事になることは明白である。

こうして、制御理論にもとづく社会工学的な短期的環境政策の有効性は、どの程度まで政府の“合理性”を想定することが許容されるのか——システムの大域的情報を獲得できるだけの十分な能力を政府は有しているかどうか——この1点にかかってくるといえそうである。安易な肯定的結論を急ぐあまりに、再び“合理的”政府を引っ張り出すようなことは、厳に慎むべきことのように思われる。

## 終節 数学的な補論

### 補論1 内部定常点の存在性と安定性

A-1 状態の時間変化率がゼロになるとき、そのような状態は“定常点”，“均衡点”，あるいは“休止点”とよばれる。定常点のすべての成分が正の値をもつとき、それは“内部定常点”，あるいは“内点解”とよばれる。本節の目的は、力学系 (6.1) の内部定常点の存在性と安定性に関する命題を提示し、これを証明することにある。

A-2 力学系 (6.1) の内点解は、もし存在すれば、次の連立1次方程式の解である。

$$\begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -\mu_1 \\ -b_{21} & -b_{22} & -\mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 - m_1 \\ a_1 - m_1 \\ -\theta \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A1})$$

第6節、第7節で仮定したのと同様に、本節においても次の仮定を置く。

<仮定> (A1) の各パラメータについて、

$$\begin{cases} a_1 - m_1 > a_2 - m_2 > 0, \\ b_{21} > b_{11} > 0, \\ b_{22} > b_{12} > 0, \end{cases} \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\mu_1}{a_1 - m_1} > \frac{\mu_2}{a_2 - m_2} > 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\mu_1}{a_1 - m_1} > 0 > \frac{\mu_2}{a_2 - m_2} \quad (\text{A3})$$

が成立するものとする。<sup>19</sup>

A-3 内点解の存在性についての検討から始める。

<補題1>  $\mu_2 \leq 0$  を仮定する。このとき (A1) の1行目と2行目の2本の方程式から変数  $c$  を消去して得られる1次関数

$$x_2 = -\alpha x_1 + \beta \quad (\text{A4})$$

において、係数  $\alpha, \beta$  はともにプラスの符号をもつ。ただし、ここに、

$$\alpha = \frac{b_{21}\mu_1 - b_{11}\mu_2}{b_{22}\mu_1 - b_{12}\mu_2}, \quad (\text{A5})$$

$$\beta = \frac{(a_2 - m_2)\mu_1 - (a_1 - m_1)\mu_2}{b_{22}\mu_1 - b_{12}\mu_2}, \quad (\text{A6})$$

である。また、(A1) の3行目の方程式が描く直線

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = \theta \quad (\text{A7})$$

は、直線 (A4) をその下側から切る。

証明： 直線 (A4) の係数  $\alpha, \beta$  は、実際に計算すると (A5), (A6) のように求められるが、仮定によって  $\mu_2$  と  $\theta$  以外のすべてのパラメータは正であるので、 $\mu_2 \leq 0$  ならば、(A5), (A6) のいずれにおいても分子、分母は正である。よって、 $\alpha > 0, \beta > 0$  である。

<sup>19</sup> これらの制約の意味付けは、第6節、(6.3) および (6.4) についての説明を参照されたい。

このとき、直線 (A4) の傾き  $-\alpha$  が負であるのに対して、直線 (A7) は

$$x_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2}x_1 + \frac{\theta}{\mu_2}$$

であって、その傾き  $-\mu_1/\mu_2$  は正ないし無限大である。よって (変数  $x_1$  の増加にともなって) 直線 (A7) は直線 (A4) を下側から切る。Q.E.D.

<補題2>  $\mu_2 > 0$  を仮定する。このとき 直線 (A4) の係数  $\alpha, \beta$  および (8.7) の係数  $\mu_1, \mu_2$  について、

$$\det(B) \geq 0 \text{ ならば } 0 < \mu_1 / \mu_2 \leq \alpha, \tag{A8}$$

$$\det(B) < 0 \text{ ならば } 0 < \alpha < \mu_1 / \mu_2, \tag{A9}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0 \tag{A10}$$

が成立する。ただし、ここに

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -\mu_1 \\ -b_{21} & -b_{22} & -\mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{A11}$$

である。

証明： 仮定 (A2), (A3) から

$$b_{22}\mu_1 - b_{12}\mu_2 > 0, (a_2 - m_2)\mu_1 - (a_1 - m_1)\mu_2 > 0.$$

したがって、

$$\alpha = \frac{b_{21}\mu_1 - b_{11}\mu_2}{b_{22}\mu_1 - b_{12}\mu_2} > 0, \beta = \frac{(a_2 - m_2)\mu_1 - (a_1 - m_1)\mu_2}{b_{22}\mu_1 - b_{12}\mu_2} > 0$$

となり、(A10) を得る。次に  $\det(B)$  を計算すると

$$\det(B) = \mu_1(b_{12}\mu_2 - b_{22}\mu_1) - \mu_2(b_{11}\mu_2 - b_{21}\mu_1)$$

であるので、 $\det(B) \geq 0$  ならば

$$\mu_1(b_{12}\mu_2 - b_{22}\mu_1) \geq \mu_2(b_{11}\mu_2 - b_{21}\mu_1)$$

である。左辺の括弧内はマイナスの符号をもつので、両辺をこれで除すると不等号の向きが変わり

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \leq \frac{b_{11}\mu_2 - b_{21}\mu_1}{b_{12}\mu_2 - b_{22}\mu_1} = \frac{b_{21}\mu_1 - b_{11}\mu_2}{b_{22}\mu_1 - b_{12}\mu_2} = \alpha$$

を得る。これより (A8) を得る。

一方  $\det(B) < 0$  のときは、不等号の向きが逆になり、

$$\alpha < \mu_1 / \mu_2$$

すなわち (A9) を得る。Q.E.D.

これらの2つの補題を用いて、次の命題を証明することができる。

<命題1> 連立1次方程式 (A1) が内点解  $(x_1^*, x_2^*, c^*) > 0$  をもつための必要十分条件は、

- (1)  $\mu_2 \leq 0$  あるいは  $\det(B) < 0$  のときには  $\mu_2 \beta < \theta < \mu_1 \gamma$ ,
- (2) それ以外のときには  $\mu_1 \gamma < \theta < \mu_2 \beta$

が成立することである。ここに  $\alpha$  と  $\beta$  は (A5) と (A6) で与えられた  $\alpha$  と  $\beta$  であり、

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(a_2 - m_2)\mu_1 - (a_1 - m_1)\mu_2}{b_{21}\mu_1 - b_{11}\mu_2} \quad (\text{A12})$$

である。

証明: はじめに  $\mu_2 \leq 0$  とする。このとき、補題1によって、 $\alpha > 0, \beta > 0$  であるので、直線 (A4) の縦軸切片と横軸切片は、それぞれ、

$$\beta > 0, \quad \gamma = \beta / \alpha > 0$$

を満たす。一方、直線 (A7) の縦軸切片と横軸切片は、それぞれ、

$$\theta \geq 0 \text{ であれば, } \theta / \mu_2 \leq 0, \quad \theta / \mu_1 \geq 0,$$

$$\theta < 0 \text{ であれば, } \theta / \mu_2 > 0, \quad \theta / \mu_1 < 0,$$

である。こうして、2本の直線 (A4), (A7) が平面上の正象限内部で交わるならば、 $\mu_1 > 0, \mu_2 \leq 0$  であるので、

$$\theta \geq 0 \text{ のとき, } \theta / \mu_2 \leq 0 < \beta, \quad 0 \leq \theta / \mu_1 < \gamma,$$

$$\theta < 0 \text{ のとき, } 0 < \theta / \mu_2 < \beta, \quad \theta / \mu_1 < 0 < \gamma,$$

が成立する。いずれの場合においても  $\mu_2 \beta < \theta < \mu_1 \gamma$  が成立することを確認できる。

次に  $\mu_2 > 0, \det(B) < 0$  と仮定する。補題2によって  $0 \leq \alpha < \mu_1 / \mu_2$  であるので、直線 (A4) は直線 (A7) を下側から切る。したがって、これらの直線が正象限の内部で交差するためには、それぞれの縦軸切片と横軸切片について

$$0 < \beta < \theta / \mu_2, \quad 0 < \theta / \mu_1 < \gamma$$

が満たされることが必要である。このとき、明らかに、 $\mu_2 \beta < \theta < \mu_1 \gamma$  も成立する。以上で命題1の(1)の部分が証明されたことになる。

次に  $\mu_2 > 0, \det(B) < 0$  の場合を考える。 $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$  であるので、補題2によって、直線 (A4) は直線 (A7) を上側から切る。したがって、これらの直線が正象限の内部で交点をもつためには、縦軸・横軸の切片について、次の条件が成り立つことが必要である。

$$0 < \theta / \mu_2 < \beta, \quad 0 < \gamma < \theta / \mu_1.$$

これより  $\mu_1 \gamma < \theta < \mu_2 \beta$  が含意される。こうして、命題1の(2)の部分も証明された。Q.E.D.

A-4 次に、力学系 (6.1) の内点解の安定性について、いくつかの命題を提示する。次の補題 3 はよく知られたものなので、証明は省略する。

<補題3> 力学系 (6.1) の内点解  $E = (x_1^*, x_2^*, c^*)$  が (局所的に) 漸近安定となるための必要十分条件は、点  $E$  で評価された (6.1) の線形化行列

$$A = \begin{bmatrix} -b_{11}x_1^* & -b_{12}x_1^* & -\delta\mu_1x_1^* \\ -b_{21}x_2^* & -b_{22}x_2^* & -\delta\mu_2x_2^* \\ \delta\mu_1c^* & \delta\mu_2c^* & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

のすべての固有値の実部が、負の値をとることである。

<補題4> 線形化行列 (A13) の特性方程式

$$P[\lambda] = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_1\lambda + k_0 = 0 \quad (\text{A14})$$

のすべての根の実部が負値になるための——すなわち線形化行列 (A13) のすべての固有値の実部が負となるための——必要十分条件は、

$$k_0 > 0, \quad k_2 > 0 \quad \text{および} \quad k_1k_2 - k_0 > 0 \quad (\text{A15})$$

が成立することである。

証明： 3次方程式  $P[\lambda] = 0$  は少なくとも1個の実根をもつので、それを  $\lambda_{1*} = -a$  と置く。すると左辺の多項式は

$$P[\lambda] = (\lambda + a)(\lambda^2 + b\lambda + c) \quad (\text{A16})$$

と因数分解できる。残りの2つの根は、2次方程式の根の公式を用いて、

$$\lambda_{2,3}^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (\text{A17})$$

と求められる。

(A16) の右辺を展開すると、

$$\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + (ab+c)\lambda + ac \quad (\text{A18})$$

となるので、(A14) と (A18) の係数を比較し、与えられた条件 (A15) を適用すると、

$$k_0 = ac > 0, \quad (\text{A19})$$

$$k_2 = a+b > 0, \quad (\text{A20})$$

$$k_1k_2 - k_0 = a^2b + ab^2 + bc > 0 \quad (\text{A21})$$

を得る。(A20), (A21) から

$$ab(a+b) + bc > 0 \quad \therefore \quad ab > \frac{-bc}{a+b}$$

であるので,

$$k_1 = ab + c > \frac{-bc}{a+b} + c = \frac{-bc + ac + bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b} > 0 \quad (\text{A22})$$

である。

さて、このとき、 $a > 0, c > 0$ である。実際、 $c \leq 0$ とすると、(A19)によって、 $a < 0$ 。したがって(A20)によって $b > 0$ となるが、このとき、 $ab + c < 0$ となって(A22)と矛盾する。 $a \leq 0$ としても同様に矛盾が引き出される。

また $b > 0$ でもある。そうでないと、十分に大きな $a > 0$ と十分に小さな $c > 0$ について、(A22)が成立しなくなる。

こうして、与えられた条件(A15)の下に、

$$\lambda_1^* = -a < 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

であることがわかった。

次に、 $b^2 - 4c \geq 0$ とすると、 $c > 0$ だから、 $b > \sqrt{b^2 - 4c}$ であり、他の2つの根(A17)も実根で、

$$\lambda_{2,3}^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$$

を満足したことがわかる。一方、 $b^2 - 4c < 0$ とすると、 $\lambda_{2,3}^*$ は共役の複素数となり、明らかにその実部 $-b/2$ はマイナスである。

こうして、条件(A15)は、特性方程式 $P[\lambda] = 0$ のすべての根の実部が負となるための十分条件であることが証明された。

逆に、 $P[\lambda] = 0$ のすべての根の実部が負であると仮定すると、

$$\lambda_1^* = -a < 0, \quad (\text{A23})$$

$$\text{Re}[\lambda_{2,3}^*] = \text{Re} \left[ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right] < 0 \quad (\text{A24})$$

である。 $\lambda_{2,3}^*$ は2次方程式 $Q[\lambda] = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$ の根でもあるが、それらの実部がともに負であるためには

$$Q[0] = c > 0 \quad (\text{A25})$$

でなければならないことは明らかである。実際、そうでないと、 $y = Q[\lambda]$ のグラフは必ず $\lambda > 0$ で横軸と交わってしまう。さらに、 $b^2 - 4c > 0$ のとき、(A25)によって、

$$b > \sqrt{b^2 - 4c} > 0,$$

一方、 $b^2 - 4c \leq 0$ のとき、 $\text{Re}[\lambda_{2,3}^*] = -b$ であるので、(A24)により

$$b > 0$$

を得る。こうして、 $P[\lambda] = 0$ のすべての根の実部が負であるときには

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

が成立することがわかった。しかし、

$$k_0 = ac, \quad k_2 = a + b, \quad k_1 k_2 - k_0 = a^2 b + ab^2 + bc$$

であるので、このときに (A15) が成立することも明らかである。

こうして、条件 (A15) が特性方程式  $P[\lambda] = 0$  のすべての根の実部が負となるための必要条件であることも証明された。Q.E.D.

次の補題は、そこに取り上げられた2つの行列式と1つの特性多項式を実際に計算することで直接に検算することが可能である。したがって、その証明は省略する。

<補題5> 力学系 (6.1) に内点解  $E = (x_1^*, x_2^*, c^*)$  が存在するならば

$$\begin{cases} k_0 = -\det(A) = -x_1^* x_2^* c^* \det(B), \\ k_2 = b_{11} x_1^* + b_{22} x_2^* \end{cases} \quad (\text{A26})$$

が成立する。

なお、補題5、および次に示す命題2において、 $\det(A)$ は力学系 (6.1) の線形化行列 (A13) の行列式である。また、 $k_2, k_1, k_0$ は、それぞれ、特性方程式 (A14) の2次項、1次項、0次項の係数、そして $\det(B)$ は (A11) で定義された行列式である。

<命題2> 力学系 (6.1) に漸近安定な内点解  $E = (x_1^*, x_2^*, c^*)$  が存在するのは、命題1の条件とともに、次の2つの条件

$$\det(B) < 0, \quad (\text{A27})$$

$$k_1 k_2 - k_0 > 0 \quad (\text{A28})$$

が同時に満足されるとき、しかもそのときに限られる。

証明： 以下では内点解  $E = (x_1^*, x_2^*, c^*)$  が存在することを仮定して、これが漸近安定となるための必要十分条件が (A27), (A28) のように表せることを証明しよう。はじめに、条件 (A27), (A28) が成立しているものとする。すると $\det(B) < 0$ , かつ、 $b_{11}, b_{22}, x_1^*, x_2^*, c^* > 0$ であるので、補題5によって、

$$k_0 = -x_1^* x_2^* c^* \det(B) > 0, \quad (\text{A29})$$

$$k_2 = b_{11} x_1^* + b_{22} x_2^* > 0 \quad (\text{A30})$$

を得る。こうして (A27), (A28) の下に補題4のすべての条件が成立する。よって内点解  $E$  は漸近安定である。逆もまた同様にして明らかである。Q.E.D.

## 補論2 フィードバック・ゲインおよび安定化補正税の計算法

B-1 本節では、第8節で取り上げた“安定化補正税”(8.2)の求め方について説明する。環境税が導入されたときの市場取引と環境コストの時間的変動は、次のシステム

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [5.00 - 0.51x_1(t) - 0.49x_2(t) - 3.00c(t)]x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = [4.99 - 0.75x_1(t) - 0.50x_2(t) + 0.20c(t)]x_2(t), \\ \frac{dc}{dt} = [-2.90 + \{3.00x_1(t) - 0.20x_2(t)\}]c(t) \end{cases} \quad (\text{B1})$$

に従うと仮定する。先に見たように、このシステムでは複雑で予測不可能な不規則変動が現れる。このシステムに状態フィードバックを追加して施すことにより、不規則変動を安定化させることを考える。<sup>20</sup>

B-2 まずはじめに、システム(B1)の内部定常点 $(x_1^*, x_2^*, c^*)$ の周りでこのシステムを線形近似する。すなわち、(B1)をこの内部定常点でテーラー展開し、2次以上の項を除去し、 $(x_1^*, x_2^*, c^*)$ に対して

$$\begin{cases} 5.00 - 0.51x_1^* - 0.49x_2^* - 3.00c^* = 0, \\ 4.99 - 0.75x_1^* - 0.50x_2^* + 0.20c^* = 0, \\ -2.90 + \{3.00x_1^* - 0.20x_2^*\} = 0, \end{cases}$$

が成立することを用いてこれを整理し、最後に $(x_1^*, x_2^*, c^*) = (1.48701, 7.80511, 0.13941)$ を代入する。こうすることでシステム(B1)の線形化システム

$$\hat{x}'(t) = \begin{pmatrix} -0.758 & -0.729 & -4.46 \\ -5.85 & -3.90 & 1.56 \\ 0.417 & -0.0278 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) \quad (\text{B2})$$

が得られる。ただし、

$$\hat{x}'(t) = \begin{pmatrix} d\hat{x}_1(t)/dt \\ d\hat{x}_2(t)/dt \\ d\hat{c}(t)/dt \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \\ c(t) - c^* \end{pmatrix}$$

である。

システム(B2)の定常点は0である。また、固有値は

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-4.89, 0.116 + 1.31i, 0.116 - 1.31i)$$

<sup>20</sup> システム(B1)は第8節の(8.1)の再述である。このシステムの下での各状態変数の変動の様子は、第6節、図6.5に表されている。

と求められる。そのなかに実部が正のものが含まれるので（そうした確認をするまでもなく既に明らかなことではあるが）このシステムは不安定である。

B-3 次に、システム (B2) に状態フィードバック  $bf\hat{x}(t)$  を施して得られるシステム

$$\hat{x}'(t) = A\hat{x}(t) - bf\hat{x}(t) = [A - bf]\hat{x}(t) \tag{B3}$$

を考える。ただし、ここでは

$$A = \begin{pmatrix} -0.758 & -0.729 & -4.46 \\ -5.85 & -3.90 & 1.56 \\ 0.417 & -0.0278 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2, f_3)$$

と記号を定めている。システム (B3) には、各時点で観察された状態変数の値  $\hat{x}(t)$ ——システムの出力——が<sup>8</sup>、その時点での入力  $-bf\hat{x}(t)$  として再びシステムの中に戻されるという形で閉じたループが形成されていることに注意しておく。<sup>21</sup>

システム (B3) の可制御性行列を求めると

$$U_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{pmatrix} 1.00 & -1.49 & 6.50 \\ 1.00 & -9.76 & 47.4 \\ 0.00 & 0.39 & -0.35 \end{pmatrix} \tag{B4}$$

と計算されるので、可制御性行列  $U_c$  のランクは3であり行列  $A$  のランクに等しい。可制御性行列  $U_c$  のランクと線形化システムの係数行列  $A$  のランクが等しいとき、システム (B3) は可制御であるといわれる。

B-4 可制御なシステムにおいては、フィードバック・ゲイン  $f = (f_1, f_2, f_3)$  の数値を適切に定めることによって、行列  $A - bf$  のすべての固有値を、予め指定した値になるように配置することが可能である。システム (B3) の解は

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) e^{(A-bf)t}$$

与えられるので、 $A - bf$  のすべての固有値の実部が負となるように  $f = (f_1, f_2, f_3)$  を選べば、この閉ループシステムは漸近安定になる。以下で、アッカーマン法にもとづく極配置法により、そのようなフィードバック・ゲイン  $f = (f_1, f_2, f_3)$  の値を求めてみよう。次の命題がそのための計算法を与える。<sup>22</sup>

---

<sup>21</sup> システム (B3) の右辺の第2項の計算式は  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (x, y, z) \triangleq \begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix}$  で定義する。なお、本文中には

制御理論に関連する知識を必要とする説明がいくつかあるが<sup>8</sup>、その詳しい内容については、例えば大住 (2003)、森 (2003) などを参照されたい。

<命題3> 閉ループシステムの行列  $A - bf$  の固有値として指定する値 (配置する極) を  $s_1, s_2, s_3$  とし, その特性多項式を

$$P(\lambda) = (\lambda - s_1)(\lambda - s_2)(\lambda - s_3) = \lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (\text{B4})$$

とする。これらの固有値を実現するフィードバック・ゲイン  $f = (f_1, f_2, f_3)$  は, 計算式

$$f = (0, 0, 1)U_c^{-1}P(A) \quad (\text{B5})$$

によって求めることができる。ただし,  $U_c^{-1}$  は可制御性行列  $U_c$  の逆行列であり,  $P(A)$  は特性多項式 (B4) の  $\lambda$  に線形化システムの係数行列  $A$  を代入して得られる行列である。

B-5 指定する固有値を  $\lambda = -9, -2, -1$  と置く。対応する特性多項式は

$$P(\lambda) = (\lambda + 9)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 29\lambda + 18$$

と求められるので,

$$P(A) = A^3 + 12A^2 + 29A + 18 = \begin{pmatrix} 9.83 & 5.14 & -110 \\ 38.8 & 41.2 & 191 \\ 10.7 & -2.22 & -4.47 \end{pmatrix} \quad (\text{B6})$$

である。一方, 可制御性行列の逆行列は

$$U_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1.15 & -0.154 & 0.541 \\ -0.0268 & 0.0268 & 3.14 \\ -0.0299 & 0.0299 & 0.635 \end{pmatrix} \quad (\text{B7})$$

と計算できる。(B6), (B7) を (B5) へ代入して

$$f = (7.67, -0.327, 6.17) \quad (\text{B8})$$

を得る。これが固有値  $\lambda = -9, -2, -1$  を実現するフィードバック・ゲインである。

最後に, システム (B3) の入力項  $-bf\hat{x}(t)$  に  $b = (1, 1, 0)^T$  および (B8) を代入して計算し, その絶対値をとると, 安定化補正税が

$$\begin{aligned} R(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (7.67, -0.327, 6.17) \hat{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 7.67 & -0.327 & 6.17 \\ 7.67 & -0.327 & 6.17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{c}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7.67\hat{x}_1(t) - 0.327\hat{x}_2(t) + 6.17\hat{c}(t) \\ 7.67\hat{x}_1(t) - 0.327\hat{x}_2(t) + 6.17\hat{c}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B9}) \end{aligned}$$

と計算される。

<sup>22</sup> 命題3の証明は省略する。アッカーマン法については, 森 (2003), 第5章, に詳しい説明と明解な例題が示されている。

$$\hat{x}(t) = (x_1(t) - x_1^*, x_2(t) - x_2^*, c(t) - c^*)$$

であるので, (B9) は

$$R(t) = \begin{pmatrix} 7.67\{x_1(t) - x_1^*\} - 0.327\{x_2(t) - x_2^*\} + 6.17\{c(t) - c^*\} \\ 7.67\{x_1(t) - x_1^*\} - 0.327\{x_2(t) - x_2^*\} + 6.17\{c(t) - c^*\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B10})$$

とも表すことができる。

(成蹊大学経済学部教授)

## 参考文献

- 石弘光 (編・著) (1933) 『環境税 実体と仕組み』, 東洋経済新報社
- 巖佐庸 (1998) 『数理生物学入門』, 共立出版。
- 植田和弘・岡敏弘・新澤秀則 (1997) 『環境政策の経済学 理論と現実』, 日本評論社。
- 潮俊光 (1996) 『カオス制御』, 朝倉書店。
- 大住晃 (2003) 『線形システム制御理論』, 森北出版株式会社。
- 環境経済政策学会 (編) (2004) 『環境税』, 東洋経済新報社。
- 経済協力開発機構 (1994) 『環境と税制 相互補完的な政策を目指して』, 有斐閣, 石弘光・監訳。
- 経済協力開発機構 (2006) 『環境税の政治経済学』, 中央法規出版, 環境関連税制研究会 (環境省)・訳。
- 諸富徹 (2000) 『環境税の理論と実際』, 有斐閣。
- 日本生態学会編 (2004) 『生態学入門』, 東京化学同人。
- 藤垣芳文 (2005) 「企業間の相互作用とロトカ・ヴォルテラの微分方程式 (1)」, 『成蹊大学経済学部論集, 第35巻, 第2号』。
- (2006) 「企業間の相互作用とロトカ・ヴォルテラの微分方程式 (2)」, 『成蹊大学経済学部論集, 第36巻, 第2号』。
- ブラウン・M (2001) 『微分方程式 その数学と応用 (下)』, シュプリンガー・フェアラーク 東京, 一楽重雄・河原正治・河原雅子・一楽祥子・訳。
- ホッフバウアー・J=シグムント・K (2001) 『進化ゲームと微分方程式』, 現代数学社, 竹内康博・佐藤一憲・宮崎倫子・訳。
- 森田善久 (1996) 『生物モデルのカオス』, 朝倉書店。
- 森泰親 (2003) 『演習で学ぶ現代制御理論』, 森北出版株式会社。
- Baumal, W. and W. E. Oates (1988) *The Theory of Environmental Policy*, Cambridge University Press.
- Clark, A. (2003) “DynPac: a Dynamical Systems Package for Mathematica (v.10.74)”, Department of Mechanical Engineering, University of Rochester.
- Smith, S. (1996) “Taxation and the Environment”, Devereux, M. P. (ed.), *The Economics of Tax Policy*, Oxford University Press.