成蹊大学理工学研究報告
J. Fac. Sci.Tech., Seikei Univ.
Vol.57 No.1・2 (2020)pp.1-6

被覆弾性層－弾性基質体の軸対称接触問題における内部応力分布

三浦 鴻太郎*1，坂本　信*2，田邊 裕治*3

Stress Distribution in Axisymmetric Contact Problem of an Elastic Layer-Substrate Body with a Cylindrical and Spherical Indenter

Kotaro MIURA*1, Makoto SAKAMOTO*2, Yuji TANABE*3

ABSTRACT：We focus on internal stress and displacement of an elastic axisymmetric contact problem for indentation of a layer-substrate body. An elastic layer is assumed to be perfectly bonded to an elastic semi-infinite substrate. The elastic layer is smoothly indented with a flat-ended cylindrical and spherical indenter. The analytical and exact solutions were obtained by solving an infinite system of simultaneous equations using the method to express a normal contact stress at the upper surface of the elastic layer as an appropriate series. This paper presented the numerical results of internal stress and displacement distributions for hard-coating system with constant values of Poisson's ratio and the thickness of elastic layer.

Keywords：contact problem, indentation test, layer-substrate body, stress distribution, analytical solution

(Received October 21, 2020)

1．はじめに

インデンテーション（押込み）試験は力学的特性を評価する簡便な手法として広く利用されている [1]．被覆層を有する材料に対しては基質物体から取り除くことなく試験が行えることから，薄膜材料のコーティング層やバイオエンジニアリングの分野では軟骨下骨上の関節軟骨，皮膚組織等の力学的特性評価に用いられている．

薄膜材料や関節軟骨は表面の摩擦特性や耐摩耗性を向上させているが，特定の荷重条件下では層界面で剥離を起こす可能性がある．このような材料や生体組織の破壊を未然に防ぐためには，層内部の応力分布を明らかにすることは重要である．

これらのことから，本研究では，弾性基質（半無限弾性体）上に密着した弾性層を円柱状および球状剛体圧子で押込む軸対称接触問題を三次元弾性論に基づき厳密に理論解析するとともに弾性層と弾性基質内部の応力と変位分布の詳細を明らかにする．

*1：理工学部システムデザイン学科助教（k_miura@st.seikei.ac.jp）

*2：新潟大学医学部保健学科教授

*3：新潟大学自然科学研究科材料生産システム専攻教授

2．三次元弾性論による内部応力の計算

図１に示すように円柱座標(r, θ, z)において，弾性基質上に密着した厚さhの弾性層上面を円柱状および球状剛体圧子で微小変位量ε_0だけ押込む軸対称接触問題を考える．

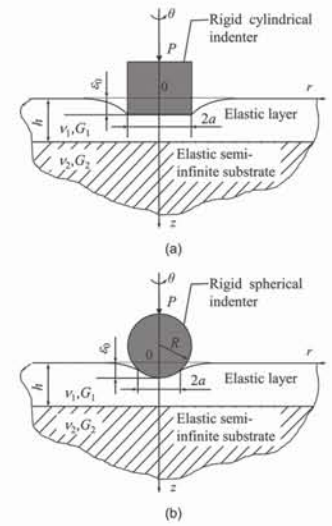


図１　弾性基質上の弾性層を剛体圧子で押込む軸対称弾性接触問題
（a：円柱状圧子，b：球状圧子）

弾性体の変位成分を(u_r, v_θ, w_z)，応力成分を$(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z})$とすると，弾性層と弾性基質の変位と応力は以下のように表わされる．

$$
\begin{aligned}
&2G_i u_r^{(i)} = \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{\partial r} + z\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial r}\\
&v_\theta^{(i)} = 0\\
&2G_i w_z^{(i)} = \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{\partial z} + z\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z} - (3-4\nu_i)\varphi_3^{(i)}\\
&\sigma_r^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi_0^{(i)}}{\partial r^2} + z\frac{\partial^2 \varphi_3^{(i)}}{\partial r^2} - 2\nu_i\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z}\\
&\sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{r\partial r} + z\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{r\partial r} - 2\nu_i\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z}\\
&\sigma_z^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi_0^{(i)}}{\partial z^2} + z\frac{\partial^2 \varphi_3^{(i)}}{\partial z^2} - 2(1-\nu_i)\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial z}\\
&\tau_{rz}^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi_0^{(i)}}{\partial r\partial z} + z\frac{\partial^2 \varphi_3^{(i)}}{\partial r\partial z} - (1-2\nu_i)\frac{\partial \varphi_3^{(i)}}{\partial r}\\
&\tau_{r\theta}^{(i)} = \tau_{\theta z}^{(i)} = 0\\
&(i=1,2)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，添字$i=1,2$はそれぞれ弾性層，弾性基質を表わしている．

本研究では，調和応力関数$\varphi^{(i)}{}_0$, $\varphi^{(i)}{}_3$ $(i=1,2)$を次のように選ぶ．

$$
\begin{aligned}
\varphi_0^{(1)} &= \int_0^\infty \left\{D^{(1)}(\lambda)\cosh\lambda z + A^{(1)}(\lambda)\sinh\lambda z\right\}J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
\varphi_3^{(1)} &= \int_0^\infty \left\{B^{(1)}(\lambda)\sinh\lambda z + C^{(1)}(\lambda)\cosh\lambda z\right\}J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_0^{(2)} &= \int_0^\infty A^{(2)}(\lambda)J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}\mathrm{d}\lambda\\
\varphi_3^{(2)} &= \int_0^\infty \{B^{(2)}(\lambda)J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで，$A^{(1)}(\lambda)$, $B^{(1)}(\lambda)$, $C^{(1)}(\lambda)$, $D^{(1)}(\lambda)$, $A^{(2)}(\lambda)$および$B^{(2)}(\lambda)$は境界条件および弾性層と弾性基質の界面における変位と応力の連続条件から決定される未知関数であり，$J_n(\lambda r)$はn次の第一種ベッセル関数である．

式（2），（3）を基礎式（1）に代入することによって弾性層と弾性基質の主要な応力と変位成分を，未知関数を含む形で以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
(\sigma_z)^{(1)} &= \int_0^\infty \left[\eta_z^{(1)}(\lambda,z)\right]\lambda J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
(\tau_{rz})^{(1)} &= \int_0^\infty \left[\eta_{rz}^{(1)}(\lambda,z)\right]\lambda J_1(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
2G_1(w_z)^{(1)} &= \int_0^\infty \left[\zeta_z^{(1)}(\lambda,z)\right]J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
2G_1(u_r)^{(1)} &= \int_0^\infty \left[\zeta_r^{(1)}(\lambda,z)\right]J_1(\lambda r)\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_z^{(1)} &= \{z\lambda\sinh\lambda z - 2(1-\nu_1)\cosh\lambda z\}B^{(1)}(\lambda)\\
&\quad + \{z\lambda\cosh\lambda z - \sinh\lambda z\}C^{(1)}(\lambda) + \lambda D^{(1)}(\lambda)\cosh\lambda z\\
\eta_{rz}^{(1)} &= \{-z\lambda\cosh\lambda z + (1-2\nu_1)\sinh\lambda z\}B^{(1)}(\lambda)\\
&\quad + \{-z\lambda\sinh\lambda z\}C^{(1)}(\lambda) - \lambda D^{(1)}(\lambda)\sinh\lambda z\\
\zeta_z^{(1)} &= \{z\lambda\cosh\lambda z - (3-4\nu_1)\sinh\lambda z\}B^{(1)}(\lambda)\\
&\quad + \{z\lambda\sinh\lambda z - 2(1-\nu_1)\cosh\lambda z\}C^{(1)}(\lambda) + \lambda D^{(1)}(\lambda)\sinh\lambda z\\
\zeta_r^{(1)} &= z\lambda B^{(1)}(\lambda)\sinh\lambda z - \{z\lambda\cosh\lambda z + (1-2\nu_1)\sinh\lambda z\}z\lambda C^{(1)}(\lambda)\\
&\quad - \lambda D^{(1)}(\lambda)\cosh\lambda z
\end{aligned}
\tag{5}
$$

弾性基質に対しては，以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
(\sigma_z)^{(2)} &= \int_0^\infty \left[\eta_z^{(2)}(\lambda,z)\right]e^{-\lambda z}\lambda J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
(\tau_{rz})^{(2)} &= \int_0^\infty \left[\eta_{rz}^{(2)}(\lambda,z)\right]e^{-\lambda z}\lambda J_1(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
2G_2(w_z)^{(2)} &= \int_0^\infty \left[\zeta_z^{(2)}(\lambda,z)\right]e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda\\
2G_2(u_r)^{(2)} &= \int_0^\infty \left[\zeta_r^{(2)}(\lambda,z)\right]e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_z^{(2)} &= \lambda A^{(2)}(\lambda) + \{z\lambda + 2(1-\nu_2)\}B^{(2)}(\lambda)\\
\eta_{rz}^{(2)} &= \lambda A^{(2)}(\lambda) + \{z\lambda + (1-2\nu_2)\}B^{(2)}(\lambda)\\
\zeta_z^{(2)} &= -\lambda A^{(2)}(\lambda) - \{z\lambda + (3-4\nu_2)\}B^{(2)}(\lambda)\\
\zeta_r^{(2)} &= -\lambda A^{(2)}(\lambda) - z\lambda B^{(2)}(\lambda)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

弾性層が剛体圧子で押込まれるとき，弾性層と圧子の間で摩擦はないと仮定すれば，弾性層表面における境界条件は次式で与えられる．

$$(w_z)_{z=0}^{(1)} = \varepsilon_0 - f(r),\ (0 \le r \le a) \tag{8}$$

$$(\sigma_z)_{z=0}^{(1)} = 0,\ (a < r < \infty) \tag{9}$$

$$(\tau_{rz})_{z=0}^{(1)} = 0,\ (0 \le r < \infty) \tag{10}$$

ここで，$f(r)$は圧子形状を表わしている．円柱状圧子の場合には$f(r)=0$，球状圧子の場合には，$f(r)=r^2/2R$としている．

次に，$z=h$の弾性層と弾性基礎の境界面は完全密着していることから，以下のような変位と応力の連続条件を満たす必要がある．

$$[\{S^{(1)}\} = \{S^{(2)}\}]_{z=h} \tag{11}$$

ここで，

$$\{S^{(i)}\} = [u_r^{(i)}\quad w_z^{(i)}\quad \sigma_z^{(i)}\quad \tau_{rz}^{(i)}] \tag{12}$$

境界条件式（10）および（11）を適用することによって，最終的に未知関数は一つになる．ここでは数式処理システムwxMaxima(MIT)を用いて，$C^{(1)}(\lambda)$に未知関数を

まとめた．この種の混合境界値問題は解析において生じる双積分方程式を第二種Fredoholm型積分方程式に帰着させる解析手法が一般的である．これに対して，本研究では弾性層表面の応力をChebyshevの直交多項式$T_n(x)$で展開することにより，双積分方程式を無限連立一次方程式に帰着させる解析手法を用いる [2]．本研究の解析手法は接触問題に対応したき裂問題などにも応用が可能である．

最終的に，本問題は円柱状圧子の場合には以下に示す無限連立一次方程式の解法問題に帰着される．

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n A_{mn} = \delta_{0m},\ (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

球状圧子の場合には，以下のようになる．

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n, c_n) A_{mn} = (\delta_{0m}, \delta_{1m}/2),\ (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

ここで，b_nおよびc_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$は未知の係数行列，δ_{0m}はKronecker delta，A_{mn}は以下の式で表わされる．

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} p(\lambda) X_m(\lambda) Z_n(\lambda) \mathrm{d}\lambda \tag{15}$$

$$p(\lambda) = \frac{e_0(\lambda)}{e_3(\lambda)} \tag{16}$$

$$X_m(\lambda) = J_m^2(\lambda a/2),\ (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

$$Z_n(\lambda) = J_{n+1/2}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-n-1/2}\left(\frac{\lambda a}{2}\right),\ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
e_0(\lambda) &= a(\lambda)\Gamma^2 + b(\lambda)\Gamma + c(\lambda) \\
e_3(\lambda) &= d(\lambda)\Gamma^2 + e(\lambda)\Gamma + f(\lambda) \\
a(\lambda) &= (4\nu_2 - 3)e^{4\beta} + (16\nu_2 - 12)\beta e^{2\beta} - 4\nu_2 + 3 \\
b(\lambda) &= \{(12 - 16\nu_1)\nu_2 + 12\nu_1 - 10\}e^{4\beta} + (8 - 16\nu_2)\beta e^{2\beta} \\
&\quad + 4\nu_2 + 4\nu_1 - 6 \\
c(\lambda) &= (4\nu_1 - 3)e^{4\beta} + 4\beta e^{2\beta} - 4\nu_1 + 3 \\
d(\lambda) &= (4\nu_2 - 3)e^{4\beta} + \{(12 - 16\nu_2)\beta^2 - 8\nu_2 + 6\}e^{2\beta} \\
&\quad + 4\nu_2 - 3 \\
e(\lambda) &= \{(12 - 16\nu_1)\nu_2 + 12\nu_1 - 10\}e^{4\beta} \\
&\quad + \{(16\nu_2 - 8)\beta^2 + (16\nu_1 - 8)\nu_2 - 8\nu_1 + 4\}e^{2\beta} \\
&\quad - 4\nu_2 - 4\nu_1 + 6 \\
f(\lambda) &= (4\nu_1 - 3)e^{4\beta} + (-4\beta^2 - 16\nu_1^2 + 24\nu_1 - 10)e^{2\beta} \\
&\quad + 4\nu_1 - 3
\end{aligned} \tag{19}$$

式（19）において，$\beta = \lambda h$，$\Gamma = G_1/G_2$としている．また，式（15）の数値積分に関しては先行研究 [2]で詳細に説明されている．

無限連立一次方程式（13），（14）はm, nを10項程度とることで十分に収束した係数行列の解を得ることができる．未知関数$C^{(1)}(\lambda)$は以下のように表される．

$$C^{(1)}(\lambda) = p(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z_n(\lambda) \tag{20}$$

ここで，円柱状圧子の場合には，

$$b_n = -\frac{1 - \nu_1}{G_1 \varepsilon_0} x_n \tag{21}$$

球状圧子の場合には，以下の関係式が成り立つ．

$$-\varepsilon_0 b_n + \frac{a^2}{4R} c_n = \frac{1 - \nu_1}{G_1} x_n \tag{22}$$

式（20）により，弾性層と弾性基質の内部応力を計算することができる．

また，弾性層表面の接触応力分布と表面変位分布は円柱状圧子の場合には，以下の式で表わされる．

$$(\sigma_z)_{z=0}^{(1)} = -\frac{2G_1\varepsilon_0}{(1 - \nu_1)\pi r\sqrt{a^2 - r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right),\ (0 \le r < a) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(w_z)_{z=0}^{(1)}}{\varepsilon_0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Bigg[&\int_0^{\infty} \{p(\lambda) - 1\} Z_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\
&+ \int_0^{\infty} \left\{ Z_n(\lambda) - \frac{2}{\pi\lambda a}\sin\lambda a \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
&+ \frac{2}{\pi a}\left\{ H(a - r)\frac{\pi}{2} + H(r - a)\sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) \right\} \Bigg]
\end{aligned} \tag{24}$$

球状圧子の場合には以下のようになる．

$$(\sigma_z)_{z=0}^{(1)} = -\frac{2G_1\varepsilon_0}{(1 - \nu_1)\pi r\sqrt{a^2 - r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n - \xi c_n\right) T_{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right),\ (0 \le r < a) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(w_z)_{z=0}^{(1)}}{\varepsilon_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n - \xi c_n\right) \Bigg[&\int_0^{\infty} \{p(\lambda) - 1\} Z_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\
&+ \int_0^{\infty} \left\{ Z_n(\lambda) - \frac{2}{\pi\lambda a}\sin\lambda a \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
&+ \frac{2}{\pi a}\left\{ H(a - r)\frac{\pi}{2} + H(r - a)\sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) \right\} \Bigg]
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで，$H(x)$は Heaviside のステップ関数であり，ξは以下に示す式で表わされる．

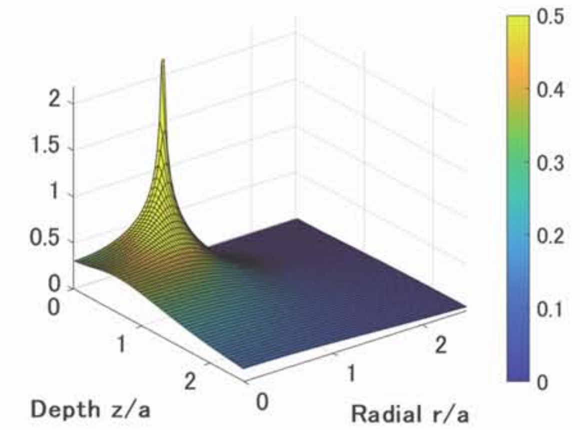
$$\xi = \frac{a^2}{4R\varepsilon_0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{27}$$

3．数値結果および考察

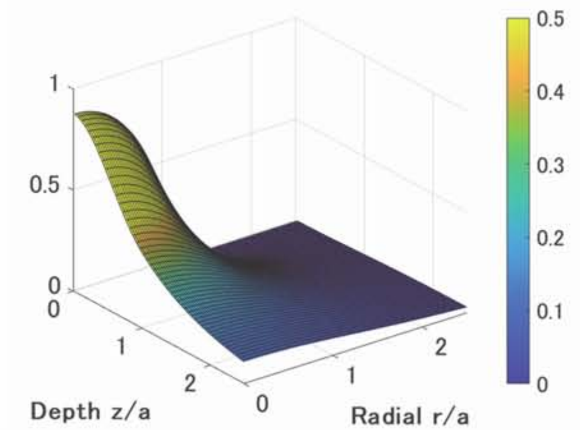
図 2, 3 はそれぞれ無次元化した垂直応力σ_z，せん断応力τ_{rz}の内部分布を示している．弾性層厚さと接触半径のアスペクト比h/aは 1.0，弾性層と弾性基質のポアソン比は 0.3，横弾性係数比G_1/G_2は 2.0 としている．図 2(a), 3(a)を見ると，円柱状圧子の場合には圧子縁に置いて応力の特異性が発生していることが確認できる．また，弾性層と弾性基質の境界（$z/a = 1.0$）で応力が連続していることが確認できるが，図 3 では若干の段があるように見える．これは，連続条件式（11）では応力と変位の勾配の連続までは満たしていないためであると考えられる．

図 2(b), 3(b)を見ると，球状圧子の場合には応力の特異性が現れないことが確認できる．また図 3(b)より，球状圧子の場合にはせん断応力τ_{rz}のピークが弾性層表面から少しだけ離れた内部で現れていることがわかる．Kulchytsky-Zhyhailo と Rogowski ら [3)]の結果でも同様な傾向が見られる．

図 4, 5 はそれぞれ無次元化した垂直方向の変位w_z，半径方向の変位u_rの内部分布を示している．アスペクト比，ポアソン比および横弾性係数比は応力分布と同様である．図 3 を見ると，円柱状圧子の場合には接触面（$0 < r/a < 1$）で一定の押込み変位量となっており，球状圧子の場合には球形を反映した押込み変位量になっていることが確認できる．また図 5 より，半径方向の変位は弾性層表面では押込みにより，中心軸の方へ引っ張られている．



(a)

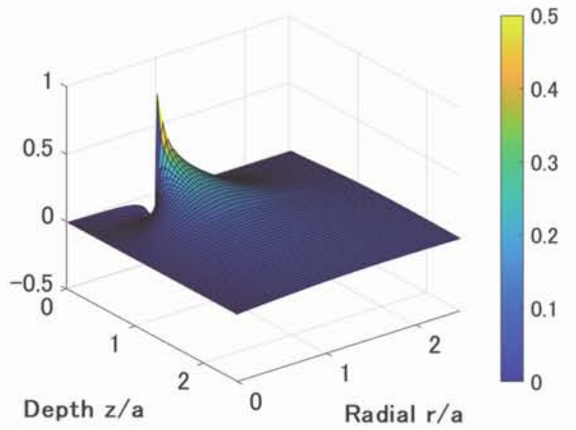


(b)

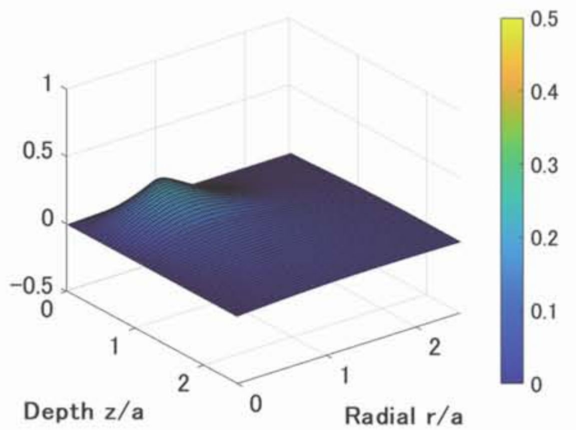
図 2　無次元化した垂直応力の内部分布
（a：円柱状圧子，b：球状圧子）

$$\bar{\sigma}_z = -\sigma_z \Big/ \left(\frac{P_1}{4a^2}\right)$$

（$h/a = 1.0,\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3,\ G_1/G_2 = 2.0$）



(a)



(b)

図 3　無次元化したせん断応力の内部分布
（a：円柱状圧子，b：球状圧子）

$$\bar{\tau}_{rz} = -\tau_{rz} \Big/ \left(\frac{P_1}{4a^2}\right)$$

（$h/a = 1.0,\ \nu_1 = \nu_2 = 0.3,\ G_1/G_2 = 2.0$）

一方で内部では逆に中心軸から離れる方向へ引き延ばされていることがわかる．さらに，変位の谷（山）部が層境界付近の $1 < r/a < 1.5$ にあることが確認できた．

４．むすび

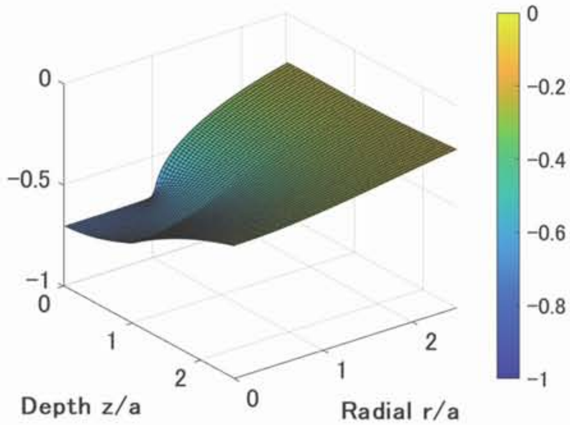
本研究では，三次元弾性論に基づいて弾性基質（半無限弾性体）上に密着した弾性層を円柱状および球状圧子で押込む軸対称接触問題を厳密に理論解析するとともに弾性層と弾性基質内部の応力と変位分布の詳細を明らかにした．これらの結果は薄膜材料や関節軟骨の層構造を有する物体の層境界における剥離現象や破壊に関して有益な基礎的知見になると考えている．

参考文献

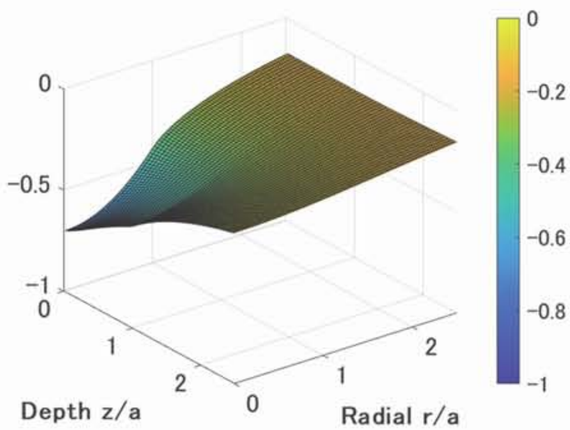
1) Fischer-Cripps, A. C., Nanoindentation. Springer-Verlag, (2002).

2) Miura, K., Sakamoto, M., Kobayashi, K., Pramudita, J. A., and Tanabe, Y., "Analytical Solution of Axisymmetrix Indentation of an Elastic Layer-Substrate Body", *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 64, (2018), pp.81-101.

3) Kulchytsky-Zhyhailo, R., Rogowski, G., "Stress in Hard Coating due to a Rigid Spherical Indenter on a Layered Elastic Half-Space", *Tribology International*, Vol. 43, (2010), pp.1592-1601.



(a)

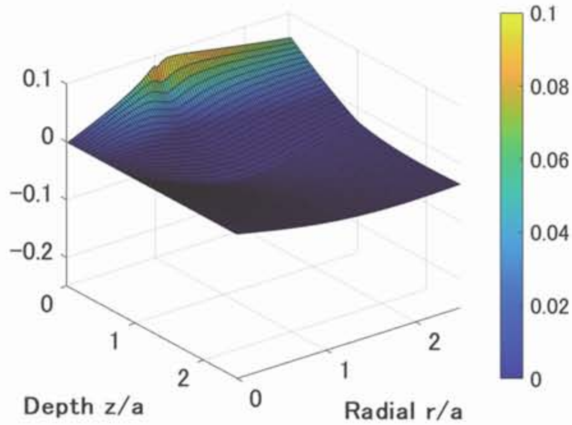


(b)

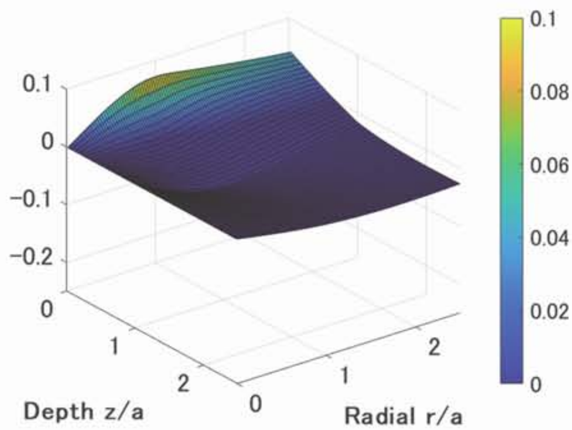
図４　無次元化した垂直方向変位の内部分布
（a：円柱状圧子，b：球状圧子）

$$\bar{w}_z = -w_z \Bigg/ \left(\frac{P_1}{4G_1} \right)$$

($h/a = 1.0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_1/G_2 = 2.0$)



(a)



(b)

図３　無次元化したせん断応力の内部分布
（a：円柱状圧子，b：球状圧子）

$$\bar{\tau}_{rz} = -\tau_{rz} \Bigg/ \left(\frac{P_1}{4a^2} \right)$$

(h/a = 1.0,　1 =　2 = 0.3, G1/G2 = 2.0)